一百零二學年度第一學期　機率論(二)　測驗一

考試日期及時間：102年11月19日10:10–12:00　　教師：黃文璋

第1題10分, 第2-6題各18分, 該有之步驟須附上 。

1. 設 X_n有 $\mathcal{P}(n\lambda)$的分佈, $n \geq 1$ 。

   (i) 試證 $X_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda$ 。

   (ii) 若$\lambda = 2$, 試求 n使得 $P(|X_n/n - \lambda| \geq 0.01) < 0.05$ 。

2. 設(X_1, X_2)之聯合p.d.f.為$f(x_1, x_2) = 3x_1,\ 0 < x_2 < x_1 < 1$ 。令$Y_1 = 1/X_1,\ Y_2 = 1/X_2$ 。試求

   (i) (Y_1, Y_2)之聯合p.d.f.;

   (ii) $E(Y_1|Y_2 = y_2),\ y_2 \geq 1$ 。

3. 設$N_1, \cdots, N_{100}$為i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$分佈之r.v.'s, $(X_1, \cdots, X_{100})$為i.i.d., 與$(N_1, \cdots, N_{100})$獨立, 且$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$ 。試求$P\big(\sum_{i=1}^{100} X_i N_i > 5\big)$, 且以適當函數表之 。

4. 令$X = \sum_{j=1}^{N} U_j$, 其中$U_1, U_2, \cdots$為i.i.d., $P(U_j = i) = p_i,\ i = 1, 2, \cdots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, 且$N$有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈 。又令 $Y = \sum_{i=1}^{\infty} iZ_i$, 其中$Z_1,\ Z_2, \cdots$為獨立, 且$Z_i$有$\mathcal{P}(\lambda p_i)$分佈, $i \geq 1$ 。試證X與Y之分佈相同 。

5. 令$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$為$[0,1]$上所有Borel集合的集合, 且令$P([0,a]) = a,\ \forall a \in \Omega$ 。對$n \geq 1$, 令$X_n(\omega) = n\omega(1-\omega^2)^n,\ \omega \in \Omega$ 。試依定義證明$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, 並給出r.v. X 。

6. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為獨立, $P(X_1 = 0) = 1$, 且對$n \geq 2$,

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n},$$
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n} \text{ 。}$$

令$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n,\ n \geq 1$ 。試證 $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, 並給出r.v. X 。