

## 一百零一學年度第二學期 機率論(一) 測驗二

考試日期及時間：102年6月24日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-4題每題15分，5-6題各20分，該有之步驟須附上。

1. 設學生進入校內福利社，有一半的機會未花錢，且有一半的機會，其消費金額有 $\mathcal{U}(0, 100]$ 分佈。試利用適當的不等式，給出100個學生，其平均消費介於21與29間之機率的一下界。
2. 設 $X, Y$ 為二獨立的 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈r.v.'s，令 $Z = X/Y$ 。
  - (i) 試求 $Z$ 之p.d.f.，並驗證此確為一p.d.f.。
  - (ii) 試求 $T = 1/Z$ 之p.d.f.，並驗證 $1/Z \stackrel{d}{=} Z$ 。
3. 設有 $n$ 對夫妻，其中有 $m$ 人死亡， $m \leq 2n$ 。假設此 $m$ 人之死亡，乃如自 $2n$ 人中，隨機取樣 $m$ 個。試求存活的夫妻對數之期望值。
4. 設 $X$ 與 $Y$ 獨立， $X$ 有 $\mathcal{U}(0, 2)$ 分佈， $Y$ 有 $\mathcal{U}(0, 3)$ 分佈。令 $M = \max\{X, Y\}$ ,  $m = \min\{X, Y\}$ 。試求 $P(m^2 > M)$ 。
5. 設r.v.  $X$ 之p.d.f.為 $f(x) = C(1 + x^2)^{-m}$ ,  $x \in R$ , 其中 $C, m$ 為常數。
  - (i) 細出能使 $f(x)$ ,  $x \in R$ , 為一p.d.f.之 $m$ 的範圍，並對一給定在此範圍中的 $m$ ，求 $C$ 之值。
  - (ii) 細定 $m$ ，試求使 $E(|X|^\alpha)$ 存在之 $\alpha$ 的範圍。
6. 設 $X, Y$ 之聯合p.d.f.為 $Cx^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1-x-y)^{\gamma-1}$ ,  $0 < x, y < 1$ ,  $x+y < 1$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ，且  $C = (\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)) / (\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma))$ 。試求給定 $Y = y$ ,  $0 < y < 1$ ,  $X$ 之條件分佈。