一百零一學年度第二學期　機率論(一)　測驗一

考試日期及時間：102年4月29日10:10–12:00　　教師：黃文璋

第1-4題每題15分, 5-6題各20分, 該有之步驟須附上。

1. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6,7,8\}$。試寫出包含A_1, A_2, A_3之最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}$, 並在$\mathcal{F}$上定義一機率函數P。

2. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$。令$X(\omega) = \omega$, $Y(\omega) = 2\omega$。試決定$X+Y$之分佈。

3. 設$X_1, X_2, \cdots$為獨立, 且X_i有$\mathcal{U}(0,i)$分佈, $i \geq 1$。試求
   (i) $P(X_n < X_{n-1} < \cdots < X_2 < X_1)$, $n \geq 2$;
   (ii) $P(X_1 < X_2 < X_3)$。

4. 設$X_1, \cdots, X_n$為 i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$分佈之r.v.'s, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$表其順序統計量。令$X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$。又令$U_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}$, $1 \leq k \leq n+1$。
   (i) 試求U_k之p.d.f.。
   (ii) 試指出U_k有那一常見分佈, 並給出參數。
   (iii) 試求$P(U_k > t)$, $0 \leq t \leq 1$。

5. 設X_1, X_2, X_3為i.i.d. $\mathcal{B}er(1/2)$分佈之r.v.'s。令
$$A_1 = \{X_2 = X_3\},\ A_2 = \{X_3 = X_1\},\ A_3 = \{X_1 = X_2\}。$$
   試問(i) A_1, A_2, A_3是否每對獨立? (ii) 是否相互獨立?

6. 設有一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中$\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F}$為包含Ω上所有開區間之最小的$\sigma-$體, P為Ω上的Lebesque測度。令$X(\omega) = \omega$, $Y(\omega) = 1-\omega$, $\omega \in \Omega$, 且
$$Z(\omega) = \begin{cases} \omega + 1/2, & \omega \in (0, 1/2], \\ \omega - 1/2, & \omega \in (1/2, 1]。 \end{cases}$$
   試決定(i) X, (ii) Y, (iii) Z, (iv) $X+Y$之分佈。