一百零一學年度第一學期　機率論(二)　測驗二

考試日期及時間：102年1月14日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題20分, 該有之步驟須附上。

1. (i) 設$a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}$, $n \geq 1$。試依極限定義證明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$。

   (ii) 設f為一連續函數, 試依定義證明$|f|$亦為一連續函數。

2. 設$\Omega = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$, $\mathcal{F}$為Ω所有子集合之集合, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$, $\forall \omega \in \Omega$。令$X_n(\omega) = \omega + \omega^n + e^{\omega/n}$, $n \geq 1$。

   (i) 試給一r.v. X, 使得$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$。

   (ii) 對(i)中之X, 試找出使$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$之正數$p$的集合。

3. 設X_n有自0開始之$\mathcal{NB}(n,\theta)$分佈, $n \geq 1$, 其中$0 < \theta < 1$。

   (i) 試找出a, 使得$X_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$。

   (ii) 試利用中央極限定理, 估計n很大時, $P(X_n \leq x)$之值, $x \in R$。

4. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為獨立, 且X_n之d.f.為

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{x+n}, & x \geq 0 \text{。} \end{cases}$$

   (i) 試證$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$。

   (ii) 試判斷對(i)中之$\{X_n, n \geq 1\}$, $S_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$成立否? 其中$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$。

5. 設$X_k, 1 \leq k \leq n$, 為i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$分佈之r.v.'s, 令$X_{n_1} \leq X_{n_2} \leq \cdots \leq X_{n_n}$表其順序統計量。對每一固定正整數$k$, 試證

   (i) $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$。

   (ii) 對$\forall p > 0$, $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 0$。

6. 設$X_1, X_2, \cdots$為i.i.d. $\mathcal{C}(0,t)$分佈之r.v.'s, $t > 0$。令$X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, $n \geq 1$。試證$P(X_{(n)}/n \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t/(\pi x)}$, $x > 0$。