

一百零一學年度第一學期 數理統計(一) 補考

考試日期及時間：102年1月25日9:00–10:00 教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_{n+1} 為一組由 $\text{Ber}(p)$ 分佈所產生之隨機樣本, $0 < p < 1, n \geq 3$ 。令 $\theta = P(\sum_{i=1}^n X_i > X_{n+1})$ 。
 - (i) 試證 $U(X_1, \dots, X_{n+1}) = I_{\{\sum_{i=1}^n X_i > X_{n+1}\}}$ 為 θ 之一不偏估計量；
 - (ii) 試求 θ 之一 UMVUE。
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{P}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。令 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $q(\theta) = \theta^2$ 。
 - (i) 試求 $q(\theta)$ 之一 UMVUE $T(\mathbf{X})$ 。
 - (ii) 試問 $\text{Var}(T(\mathbf{X}))$ 是否達到 CRLB。
3. 設 X_1, X_2 為由 $\text{Be}(\theta, 1)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$ 。欲檢定 $H_0 : \theta = 1$, vs. $H_a : \theta = 2$ 。拒絕域取為 $\{3/(4X_1) \leq X_2\}$ 。試求此檢定之檢力函數。
4. 某廠牌輪胎之壽命 X 有 $\mathcal{N}(\theta, 5,000^2)$ 分佈。欲檢定 $H_0 : \theta \leq 30,000$, vs. $H_a : \theta > 30,000$ 。取一組樣本數為 n 之隨機樣本, 得樣本平均 \bar{X} , 拒絕域取為 $\{\bar{X} \geq c\}$ 。試決定 n 之值, 使得檢力函數滿足 $K(30,000) \doteq 0.01$, 且 $K(35,000) \doteq 0.98$ 。
5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta \in (0, \infty)$ 。欲檢定 $H_0 : \theta \leq \theta_0$, vs. $H_a : \theta > \theta_0$ 。
 - (i) 試給一合理的拒絕域。
 - (ii) 對 (i) 中之拒絕域, 設 $\theta_0 = 1/2$, $n = 20$, 且 $X_{(n)} = 0.48$, 試求此時之 p -值。