

# 一百零一學年度第一學期 數理統計(一) 測驗二

考試日期及時間：102年1月16日 10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-5題各16分，6-7題各20分，該有之步驟須附上。

1. 設  $X_1, \dots, X_{25}$  為 i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$  分佈之 r.v.'s, 且  $E(X_1) = 3$ 。令  $\bar{X}$  表樣本平均,  $S^2$  表樣本變異數。分別對下述二假設
  - (i)  $\text{Var}(X_1) = 100$ ;
  - (ii)  $\text{Var}(X_1)$  未知, 但  $S^2 = 100$ , 求  $P(\bar{X} > 1.274)$  之近似值。
2. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{P}(\lambda)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\lambda > 0$ 。欲求  $\theta = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$  之 UMVUE。
  - (i) 先找出一完備充分統計量  $T$ ;
  - (ii) 利用  $I_{\{X_1=0\}}$  為  $\theta$  之一不偏估計量, 以求出 UMVUE;
  - (iii) 利用找一  $T$  的函數  $h(T)$ , 滿足  $E(h(T)) = \theta$ , 以求出 UMVUE。
3. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由 p.d.f.  $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}/(1+x)^{\theta+1}$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $\theta > 0$ , 所產生之隨機樣本。試求  $\theta^{-2}$  之一 UMVUE。
4. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{N}(\theta, 1)$  分佈所產生之隨機樣本, 令  $q(\theta) = \theta^2$ 。
  - (i) 試證  $\bar{X}_n^2 - 1/n$  為  $q(\theta)$  之一 UMVUE;
  - (ii) 試求  $\text{Var}(\bar{X}_n^2 - 1/n)$ , 並證明此值大於 CRLB。
5. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{P}(\theta)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\theta > 0$ 。令  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , 取  $q(\theta) = E(X_1)$ 。
  - (i) 試求  $q(\theta)$  之一 UMVUE  $T(\mathbf{X})$ 。
  - (ii) 試求 CRLB。
  - (iii) 試問  $\text{Var}(T(\mathbf{X}))$  是否達到 CRLB?
6. 設  $X_1, X_2$  為由  $\mathcal{Be}(\theta, 1)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$ 。欲檢定  $H_0 : \theta = 1$ , vs.  $H_a : \theta = 2$ 。拒絕域取為  $\{3/(4X_1) \leq X_2\}$ 。試求此檢定之檢力函數。
7. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{U}(0, \theta)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\theta \in (0, \infty)$ 。欲檢定  $H_0 : \theta \leq \theta_0$ , vs.  $H_a : \theta > \theta_0$ 。取拒絕域為  $\{X_{(n)} \geq c\}$ 。
  - (i) 試求檢力函數  $K(\theta)$ , 並證明此為  $\theta$  之一增函數;
  - (ii) 設  $\theta_0 = 1/2$ , 試求  $c$  之值, 使顯著水準為 0.05;
  - (iii) 試決定  $n$  要多大, 使得對 (ii) 中之檢定,  $K(0.75) \geq 0.98$ ;
  - (iv) 承 (ii), 設  $n = 20$ , 且  $X_{(n)} = 0.48$ , 試求此時之  $p$ -值。