

一百零一學年度第一學期 數理統計(一) 測驗一

考試日期及時間：101年11月21日10:10-12:00

教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta \neq 0$ 。試問 θ 之完備充分統計量是否存在?
2. 設 X_1, \dots, X_n 為 i.i.d., 以 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 為其共同分佈, 其中 $n \geq 2$, μ 為未知。令 $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ 。取 σ^2 之事前分佈為 $\mathcal{IG}(\alpha, \beta)$ 。在此一 r.v. U 稱為有 $\mathcal{IG}(\alpha, \beta)$ 分佈, 若其 p.d.f. 為

$$f(u) = \frac{e^{-1/(u\beta)}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha u^{\alpha+1}}, u > 0,$$

其中 $\alpha, \beta > 0$ 為常數。試證給定 S_n^2, σ^2 之事後分佈為

$$\mathcal{IG}(\alpha + n/2, ((n-1)S_n^2/2 + \beta^{-1})^{-1})。$$

3. 設 X 有自 r 開始之 $\mathcal{NB}(r, \theta)$ 分佈, $0 < \theta < 1$, r 為一已知之正整數。試分別求 (i) θ^{-1} , (ii) θ^{-2} 之一不偏估計量。
4. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, $n \geq 2$ 。
 - (i) 設 σ^2 已知, 而 μ 未知, 試求 μ 之一 UMVUE;
 - (ii) 設 μ 已知, 而 σ^2 未知, 試求 σ^2 之一 UMVUE;
 - (iii) 設 μ 已知, 而 σ^2 未知, 試求 σ 之一 UMVUE。
5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\lambda > 0$ 。欲求 $\theta = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$ 之 UMVUE。
 - (i) 先找出一完備充分統計量 T ;
 - (ii) 利用 $I_{\{X_1=0\}}$ 為 θ 之一不偏估計量, 以求出 UMVUE;
 - (iii) 利用找一 T 的函數 $h(T)$, 滿足 $E(h(T)) = \theta$, 以求出 UMVUE。
6. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}/(1+x)^{\theta+1}$, $0 < x < \infty$, $\theta > 0$, 所產生之隨機樣本。試分別求 (i) θ^{-1} , (ii) θ^{-2} 之一 UMVUE。