

一百學年度第二學期 機率與統計二 測驗三

考試日期及時間：101年6月20日10:10–11:50 教師：黃文璋

第1-3題各20分，第4-7題各15分，該有之步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}[\theta_1, \theta_2]$ 分佈所產生之隨機樣本， $\theta_1 < \theta_2$ 。試求(i) $E(X)$ ，(ii) $\text{Var}(X)$ 之MLE。
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\lambda > 0$ 。試以(i) 動差法求 $P(1 \leq X \leq 3)$ 之一估計量；(ii) 最大概似估計法求 $P(|X - 3| \geq 1)$ 之估計量。
3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $P(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本。又 λ 之事前分佈為 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 。試求(i) λ 之動差估計量；(ii) $P(X \geq 2)$ 之MLE；(iii) 在給定 $(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ 之下， λ 的事後分佈；(iv) 求 λ 之貝氏估計量。
4. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\boldsymbol{\theta})$ 所產生之隨機樣本，其中

$$f(x|\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)$, $\mu \in R$, $\sigma > 0$ 。

- (i) 若 μ, σ 皆未知，試求 $\boldsymbol{\theta}$ 之一最小充分統計量；
- (ii) 若 σ 已知，試求 μ 之一最小充分統計量；
- (iii) 若 μ 已知，試求 σ 之一最小充分統計量。

5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由在 S 上均勻分佈所產生之隨機樣本，其中 $S = [-2, -1] \cup [0, \theta]$, $\theta \geq 0$ 。試求(i) θ 之動差估計量；(ii) θ 之MLE；(iii) θ 之MLE，若未觀測到 X_1, \dots, X_n ，只知非負的 X_i 's 之個數 M 。

6. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\alpha, \beta)$ 所產生之隨機樣本，其中

$$f(x|\alpha, \beta) = \alpha x^{\alpha-1} / \beta^\alpha, \quad 0 \leq x \leq \beta,$$

$\alpha, \beta > 0$ 。試求(i) (α, β) 之一個二維的最小充分統計量；(ii) α, β 之MLE；(iii) $P(X \leq \beta/2)$ 之MLE。

7. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\theta > 0$ 。令 $U_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ 中小於 4 之個數。試基於 U_n 給出 θ 之MLE。