

一百學年度第二學期 機率與統計二 測驗二

考試日期及時間：101年5月23日10:10–11:50 教師：黃文璋

第一題10分，第2-7題各15分，該有之步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本。試證 $nX_{(1)}$ 與 X_1 有相同的分佈。
2. 設 X_1, X_2, X_3 為獨立的隨機變數，且 X_i 有 $\mathcal{N}(i, i^2)$ 分佈， $i = 1, 2, 3$ 。試利用 X_1, X_2, X_3 的函數，分別造出有如下的分佈。
 - (i) χ_3^2 ,
 - (ii) T_2 ,
 - (iii) $\mathcal{F}_{1,2}$ 。
3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\theta > 0$ 。試證 $X_{(1)}/X_{(n)}$ 與 $X_{(n)}$ 獨立，並分別給出 $X_{(1)}/X_{(n)}$ 及 $X_{(n)}$ 之 p.d.f.。
4. 設 X_1, \dots, X_n 為一組隨機樣本， $n \geq 2$ 。試證統計量
 - (i) (\bar{X}_n, S_n^2) 與 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ 等價；
 - (ii) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 與 $(X_{(n)} - X_{(1)}, (X_{(n)} + X_{(1)})/2)$ 等價。
5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\boldsymbol{\theta})$ 所產生之隨機樣本，其中

$$f(x|\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma} & , x \geq \mu, \\ 0 & , \text{其他}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)$, $\mu \in R$, $\sigma > 0$ 。

- (i) 若 μ, σ 皆未知，試求 $\boldsymbol{\theta}$ 之一最小充分統計量；
- (ii) 若 σ 已知，試求 μ 之一最小充分統計量；
- (iii) 若 μ 已知，試求 σ 之一最小充分統計量。

6. 設 $X_1, \dots, X_n, n \geq 2$, 為一組由 p.d.f. $f(x|\theta) = (x/\theta)e^{-x^2/(2\theta)}$, $x > 0, \theta > 0$, 所產生之隨機樣本。
 - (i) 試證 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 為 θ 之一最小充分統計量；
 - (ii) 試證 $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 並非 θ 之一充分統計量。
7. 設 X_1, \dots, X_n 為獨立的隨機變數，且 X_k 有波松分佈，參數為 $(\alpha/k) \cdot (n/(n+\beta))^k$, $1 \leq k \leq n$ 。試求 (α, β) 之一最小充分統計量。