

一百學年度第二學期 機率與統計二 測驗一

考試日期及時間：101年4月11日 10:10–11:50 教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_{36} 為 i.i.d. $\mathcal{P}(4)$ 分佈之 r.v.'s。令 $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_{36})/36$ 。試估計 $P(3.76 \leq \bar{X} \leq 4.63)$ ，並以 Φ 表之。
2. 自 1 至 n 的 n 個號碼中，隨機選號 m 次，每次選出後放回。令 N 表沒被選中的號碼數。試求
 - (i) $E(N)$;
 - (ii) $\text{Var}(N)$;
 - (iii) 當 $m = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E(N)/n$ 。
3. (i) 設 X 為一 r.v., $g(x)$ 為一非負函數，且滿足 $E(g(X))$ 存在。試證對 $\forall c > 0$,

$$P(g(X) \geq c) \leq \frac{E(g(X))}{c};$$

- (ii) 當 $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ 皆存在，試證 $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$, $\forall k > 0$;
- (iii) 設 X 有 $\Gamma(3, \frac{1}{3})$ 分佈，利用 (ii)，試求 $P(|X - 1| \geq 1)$ 之一上界。
- (iv) 承 (iii)，試求出 $P(|X - 1| \geq 1)$ 之值，並與 (iii) 中所得上界比較大小。
4. 設 X_1, \dots, X_n 為 i.i.d., $n \geq 2$ 。試證
 - (i) $\bar{X}_{n+1} = (n\bar{X}_n + X_{n+1})/(n+1)$;
 - (ii) $nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + (n/(n+1))(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2$ 。
5. 設 X 有 $\mathcal{F}_{n,m}$ 分佈，試求 X 之 p.d.f.。