

# 一百學年度第二學期 機率論(一) 補考

考試日期及時間：101年6月26日8:30–9:30 教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設  $X, Y, Z$  為 i.i.d.  $\mathcal{E}(1)$  分佈之 r.v.'s。試求  $P(X \leq 2Y, \text{ 且 } X \leq 2Z)$ 。
2. 設  $X > 0$ , 且  $Y = \log X$  有  $\mathcal{C}(0, 1)$  分佈。試給出使  $E(X^r)$  存在  $r$  之範圍。
3. 設有 10 個紅球，編號 1 至 10，及 10 個紅箱，編號 1 至 10。另有 10 個藍球，編號 1 至 10，及 10 個藍箱，編號 1 至 10。將 20 個球隨機地放進 20 個箱中，每箱恰放進 1 球。令  $M$  表箱之編號與其中球之編號一致（不管顏色）之箱數。試求  $E(M)$  及  $\text{Var}(M)$ 。
4. 設  $X_n$  有  $\Gamma(\alpha_n, \beta_n)$  分佈， $n \geq 1$ 。令  $Y_n = (X_n - \mu_n)/\sigma_n$ ，其中  $\mu_n = E(X_n)$ ， $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n)$ ， $n \geq 1$ 。又設  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$ 。以  $g_n(y)$  表  $Y_n$  之 p.d.f.。試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y)$ ，並給出極限下  $y$  之範圍。
5. 設  $X, Y$  之聯合 p.d.f. 為

$$f(x, y) = 1/\pi, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

令  $U = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ ,  $V = \arctan(Y/X)$ 。試求  $U, V$  之聯合分佈，並問  $U$  與  $V$  是否獨立？