一百學年度第二學期　機率論(一)　測驗二

考試日期及時間：101年6月18日10:10–11:50　　教師：黃文璋

每題20分, 該有之步驟須附上。

1. 設$(X,\ Y)$之聯合p.d.f.為

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{3/2}},\ x,y\in R\text{。}$$

令$T=X/Y$。試求T之分佈。

2. 設$X>0$, 且$Y=\log X$有$\mathcal{C}(0,1)$分佈。

(i) 試求X之p.d.f.f, 及d.f.F。

(ii) 試證$f(x)$在$x>0$為漸減函數。

(iii) 試證$E(X^r)$存在, 若且唯若$r=0$。

3. 設有10個紅球, 編號1至10, 及10個紅箱, 編號1至10。另有10個藍球, 編號1至10, 及10個藍箱, 編號1至10。將20個球隨機地放進20個箱中, 每箱恰放進1球。令M表箱之編號與其中球之編號一致(不管顏色)之箱數。試求$E(M)$及$\mathrm{Var}(M)$。

4. 令X之p.d.f.為$f(x)=24x^{-4},\ x\geq 2$。令$\mu=E(X)$。對$\delta>0$,

(i) 試求$q(\delta)=P(|X-\mu|\geq\delta)$;

(ii) 利用Chebyshev不等式, 試求$q(\delta)$之一上界$q_1(\delta)$;

(iii) 試比較$q(\delta)$與$q_1(\delta)$之大小。

5. 設X_n有$\Gamma(\alpha_n,\beta_n)$分佈, $n\geq 1$。令$Y_n=(X_n-\mu_n)/\sigma_n$, 其中$\mu_n=E(X_n)$, $\sigma_n^2=\mathrm{Var}(X_n)$, $n\geq 1$。又設$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$。以$g_n(y)$表$Y_n$之p.d.f.。

(i) 試求$g_n(y)$, 並給出y之範圍。

(ii) 試求$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(y)$, 並給出極限下$y$之範圍。