一百學年度第二學期　機率論(一)　測驗一

考試日期及時間：101年4月16日10:10–11:50　　教師：黃文璋

第1-5題各16分, 第6題20分, 該有之步驟須附上。

1. 設$\Omega = \{1, 2, \cdots, p\}$, 其中$p$為一質數。取$\mathcal{F}$為$\Omega$之所有子集所形成的集合, 且對$\forall A \in \mathcal{F}$, 令$P(A) = |A|/p$, 其中$|A|$表$A$中之元素個數。試證若$A$與$B$獨立, 則$A, B$中至少有一為$\emptyset$或$\Omega$。

2. 設有n個袋子, 第r個袋子中有$r-1$個紅球及$n-r$個白球, $r = 1, \cdots, n$。隨機選一袋, 並自該袋中隨機取二球(每次取出後不放回)。試求

   (i) 所取第二個球為白球之機率;

   (ii) 若取出之第一個球為白球, 則所取第二個球為白球之機率。

3. 投擲一公正的銅板2次, 令事件 A表第1次為正面, B表第2次為正面, C表恰有1次為正面。試證

   (i) A, B, C為每對獨立事件;

   (ii) A, B不為互斥事件;

   (iii) $A \cap B \cap C = \emptyset$;

   (iv) A, B, C不為獨立事件。

4. 設有機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X為一r.v., 令$Y = X^2$。試依定義證明Y亦為一r.v.。

5. 美國NBA湖人隊的好手小飛俠布萊恩(Kobe Bryant)2012年3月31日在主場對黃蜂隊, 創下前15次出手皆落空的紀錄, 引起球迷及媒體的重視。布萊恩在NBA的生涯, 至該場共出賽1155場, 每場平均出手約23.5次, 平均命中率約為0.42。為了簡化, 假設每場皆出手23次, 命中率為0.42。試給出他在1155場中, 會發生在一場中, 至少連續15次出手皆落空的機率。

6. 設$\Omega = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = 1/6$, $\forall \omega \in \Omega$。令$X(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega$; $Y(\omega) = 1$, 若$\omega > 0$, $Y(\omega) = 0$, 若$\omega < 0$; $Z(\omega) = 2$, 若$\omega \geq -1$, $Z(\omega) = -1$, 若$\omega < -1$。

   (i) 最小的σ-體$\mathcal{F}_1$, 使X為一r.v.;

   (ii) 最小的σ-體$\mathcal{F}_2$, 使Y為一r.v.;

   (iii) 最小的σ-體$\mathcal{F}_3$, 使Z為一r.v.;

   (iv) 最小的σ-體$\mathcal{F}_4$, 使Y, Z皆為r.v.'s;

   (v) 最小的σ-體$\mathcal{F}_5$, 使$X + Y$為一r.v.;

   (vi) 最小的σ-體$\mathcal{F}_6$, 使$Y + Z$為一r.v.;

   (vii) 最小的σ-體$\mathcal{F}_7$, 使Y^2為一r.v.;

   (viii) 試給出Z之d.f. $G(z)$, $z \in R$, 並繪出其圖。