

一百學年度第一學期 機率與統計 測驗三

考試日期及時間：101年1月11日10:10–11:50

教師：黃文章

第1-4題各10分，第5-8題各15分，該有之步驟須附上。

1. 設 $X, Y$ 之聯合p.d.f.為 $f(x, y) = c, x^2 + y^2 \leq 1$ 。
  - (i) 試求 $c$ 之值;
  - (ii) 試證 $\mu_X = \mu_Y = \rho(X, Y) = 0$ 。
2. 設 $Y = aX + b + \varepsilon$ ，其中 $a, b$ 為常數， $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ， $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ，且設 $X$ 與 $\varepsilon$ 獨立。試求
  - (i)  $\text{Cov}(X, Y)$ ;
  - (ii)  $\text{Cov}(Y, \varepsilon)$ 。
3. 設 $X$ 與 $Y$ 獨立，且皆有p.d.f. $f(x) = 1/x^2, x > 1$ 。令 $U = X/Y$ ，試求 $U$ 之p.d.f.。
4. 設 $X$ 與 $Y$ 獨立，且皆有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分佈。試證 $X/(X + Y)$ 有 $\mathcal{C}(1/2, 1/2)$ 分佈。
5. 設 $X, Y$ 之聯合p.d.f.為 $f(x, y) = 24xy, x, y \geq 0, x + y \leq 1$ 。試求
  - (i)  $E(X), \text{Var}(X)$ ;
  - (ii)  $\text{Cov}(X, Y)$ ;
  - (iii)  $\rho(X, Y)$ 。
6. 設 $Y|N$ 有 $\mathcal{B}(N, p)$ 分佈， $N|\Lambda$ 有 $P(\Lambda)$ 分佈，且 $\Lambda$ 有 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分佈，其中 $\alpha$ 為正整數。試求 $Y$ 之非條件分佈。
7. 設 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(2, 3, 4, 9, 0.1)$ 。試給出 $2X + 5Y$ 之分佈。
8. 設 $X, Y, Z$ 之聯合p.d.f.為 $f(x, y, z) = z^2 e^{-z(1+x+y)}, x, y, z \geq 0$ 。試求
  - (i)  $f_Z(z)$ ;
  - (ii)  $f_{X,Y|Z}(x, y|z)$ ;
  - (iii)  $f_{X|Z}(x|z)$ 。