

一百學年度第一學期 機率與統計 測驗二

考試日期及時間：100年12月7日10:10-11:50

教師：黃文章

第1-4題各10分，第5-7題各20分，該有之步驟須附上。

1. 設隨機變數 $X$ 有 $\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈，其p.d.f.以 $f(x)$ 表之。試證 $f(x) = (\lambda/x) \cdot f(x-1), \forall x \geq 1$ ，並討論 $f$ 之極大值發生處。
2. 設 $Y$ 有自0開始之 $\mathcal{G}e(p)$ 分佈， $0 < p < 1$ 。又設 $X$ 有 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈，其中 $\lambda = -\log(1-p)$ 。試證 $Y \stackrel{d}{=} [X]$ ，其中 $[\cdot]$ 表最大整數函數。
3. 設 $X$ 有 $\mathcal{B}e(\alpha, \beta)$ 分佈。令 $Z = rX/(1-X)$ ，其中 $r > 0$ 為一常數，試求 $Z$ 之p.d.f.。
4. 設 $X$ 之p.d.f.為

$$f(x) = \sqrt{2/\pi} x^2 e^{-x^2/2}, x > 0。$$

- (i) 試證 $f$ 確為一p.d.f.;
  - (ii) 設 $Y$ 有 $\Gamma(3/2, \beta)$ 分佈，試證 $Z = (2Y/\beta)^{1/2}$ 之p.d.f.如 $f$ 。
5. 設 $X, Y$ 之聯合p.d.f.為 $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}, 0 \leq x < y < \infty$ 。
    - (i) 試分別求 $X$ 及 $Y$ 之邊際p.d.f.'s。
    - (ii) 分別指出 $X$ 及 $Y$ 有那一常見分佈，參數為何?
    - (iii) 試問 $X$ 與 $Y$ 獨立否?
    - (iv) 試求 $P(Y > 2X)$ 。
  6. 設 $X, Y$ 之聯合p.d.f.為 $f(x, y) = ye^{-xy-y}, x, y > 0$ 。
    - (i) 試求 $Y$ 之邊際p.d.f.  $f_Y(y), y > 0$ 。
    - (ii) 試求給定 $Y = y$ 之下， $X$ 之條件p.d.f.  $f_{X|Y}(x|y), x, y > 0$ 。
    - (iii) 試指出 $f_{X|Y}$ 有那一常見分佈，參數為何。
    - (iv) 試求 $E(X|y)$ 及 $\text{Var}(X|y)$ 。
  7. 設 $X, Y$ 為二獨立的r.v.'s, 且皆有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。令

$$Z = \begin{cases} 2X, & \text{若 } \lambda X > Y, \\ -2X, & \text{若 } \lambda X \leq Y. \end{cases}$$

- (i) 試求 $Z$ 之p.d.f.  $f(z), z \in R$ 。(10分)
- (ii) 試驗證(i)中之 $f(z), z \in R$ ，確實為一p.d.f.。(5分)
- (iii) 試求 $Z^2$ 之p.d.f.，並指出此為那一常見分佈，參數為何。(5分)