

一百學年度第一學期 機率與統計 測驗一

考試日期及時間：100年10月26日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1題10分，第2-7題各15分，該有之步驟須附上。

1. 設 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 已知 Ω 上一 σ -體中有兩個元素 $\{1\}$ 及 $\{1, 2\}$ 。(i) 試寫出最小的這種 σ -體 \mathcal{F} ; (ii) 在 \mathcal{F} 上定義一機率函數 P , 滿足 $P(\{1\}) = 0.2$, $P(\{1, 2\}) = 0.3$ 。
2. 投擲1公正的骰子1次, 令 X 表所得之點數除以4之餘數。試求(i) X 之機率密度函數 f ; (ii) $E(X)$; (iii) $\text{Var}(X)$ 。
3. 設隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , 1 \leq x < 2, \\ 3 - x & , 2 \leq x < 3, \\ 0 & , \text{其他} . \end{cases}$$

試求(i) X 之分佈函數 $F(x)$, $x \in R$ (10分); (ii) $P(X \leq 5/2)$ (5分)。

4. 試決定常數 c , 使下述 f 成為一機率密度函數。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -1, \\ -cx^3 & , -1 < x \leq 0, \\ ce^{-6x} & , x > 0 . \end{cases}$$

5. 設 X 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈, 令 $Y = \log \frac{X}{1-X}$ 。試求(i) Y 之機率密度函數 $f(x)$, $x \in R$; (ii) Y 之分佈函數 $F(x)$, $x \in R$; (iii) $P(Y < 0)$ 。
6. A 先生去賭輪盤, 每次賭注1元, 若押中則可獲36元(原來的1元自己仍留著), 若輸則失去1元。已知押中的機率為 $1/38$ 。賭100次, 令 X 表贏之次數。試給出(i) X 之分佈 (5分); (ii) 淨所得為正之機率 (10分)。
7. 每次投擲兩個公正的銅板, 直到同時出現兩個正面才停止。令 Y 表總共之投擲數, 試求(i) Y 之機率密度函數; (ii) Y 大於5之機率; (iii) $E(Y)$ 。