

一百學年度第一學期 機率論(二) 測驗二

考試日期及時間：101年1月9日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-3題各10分，第4-5題各20分，第6題30分，該有之步驟須附上。

1. 設有r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$ 及 $\{Y_n, n \geq 1\}$, 且 $E((X_n - Y_n)^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\longrightarrow} 0$, 又設 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.m.} X$ 。試證 $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.m.} X$ 。
2. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$ 為i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ 分佈之r.v.'s。試證 $P(X_n > c \log n, \text{i.o.}) = 0$, 若且唯若 $c > 1$ 。
3. 設r.v. X 有 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分佈。試求 $\alpha \rightarrow \infty$ 時, $(X - \alpha\beta)/(\sqrt{\alpha}\beta)$ 之極限分佈。
4. 設 X_n 有 $\Gamma(np, q)$ 分佈, $n \geq 1$ 。
 - (i) 試證 $X_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} pq$ 。
 - (ii) 試給一子數列 $\{n_k, k \geq 1\}$, 使得 $X_{n_k}/n_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} pq$ 。
5. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$ 為i.i.d.的r.v.'s, 且 $E(X_1) = 0$, $\text{Var}(X_1) = 1$ 。試證
 - (i) $\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{(\sum_{j=1}^n X_j^2)^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$;
 - (ii) $\frac{\sqrt{n} \sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$ 。
6. 設有r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$, X_n 之p.d.f.為
$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, n \geq 1.$$
 - (i) 試證 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, 並給出 X 。
 - (ii) 對(i)中之 X , 試給出使 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ 之 p 的集合。
 - (iii) 對(i)中之 X , 試問 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} X$ 是否成立? 或不一定?