

## 一百學年度第一學期 機率論(二) 測驗一

考試日期及時間：100年11月14日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1題10分，第2-7題各15分，該有之步驟須附上。

1. 設給定  $U = u$ ,  $X$  有  $\mathcal{B}(n, u)$  分佈，且  $U$  有  $\mathcal{U}(0, 1)$  分佈。試以母函數求  $X$  之非條件分佈。
2. 設  $(X, Y)$  之聯合母函數為

$$g_{X,Y}(s, t) = E(s^X t^Y) = \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{1 - p_1 s - p_2 t}\right)^n, |s|, |t| \leq 1,$$

其中  $p_1, p_2 \geq 0$ , 且  $p_1 + p_2 \leq 1$ 。試求  $X, Y$  之邊際p.d.f.'s,  $X + Y$  之p.d.f., 並指出  $X + Y$  之分佈。

3. 設  $X_1, \dots, X_n$  為 i.i.d.  $\mathcal{U}[0, t]$  分佈之 r.v.'s,  $t > 0$ ,  $n \geq 1$ 。

- (i) 試求  $\sum_{i=1}^n X_i$  之 Laplace 轉換  $\phi(u)$ ,  $u \geq 0$ 。
- (ii) 試利用  $\phi(u)$ ,  $u \geq 0$ , 求  $E(\sum_{i=1}^n X_i)$ 。

4. 某工廠生產立方體石塊，其中有半數邊長為 1，半數邊長為 2。 $A$  與  $B$ 二人，各自庫存大量的石塊中，隨機地取 100 個。試分別估計下述二事件之機率：
  - (i)  $A$  所取石塊之總體積超過 460;
  - (ii)  $A$  所取石塊之總體積超過  $B$  所取石塊之總體積 100。

5. 設  $\{X_n, n \geq 1\}$  為每對無相關，且  $X_n$  有  $\mathcal{P}(1 + 1/n)$  分佈， $n \geq 1$ 。試問  $n \rightarrow \infty$  時， $\overline{X}_n$  是否會機率收斂至那一 r.v.?

6. 令  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  為  $[0, 1]$  上所有 Borel 集合的集合，且令  $P([0, a]) = a$ ,  $\forall a \in \Omega$ 。對  $\forall n \geq 1$ , 令  $X_n(\omega) = \sin(\omega + \omega^n) + \omega^n + 1$ ,  $\omega \in \Omega$ 。試依定義證明  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ , 並給出  $X$ 。

7. 設  $\{X_n, n \geq 1\}$  為獨立,  $P(X_1 = 0) = 1$ , 且對  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \log n}, \\ P(X_n = 0) &= 1 - \frac{1}{n \log n}. \end{aligned}$$

令  $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ,  $n \geq 1$ 。試證  $\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ , 並給出  $X$ 。