第四章

各種轉換

2.設$\{X_k, k \geq 1\}$為i.i.d., 且$P(X_k = 1) = p = 1 - P(X_k = -1)$ 。令$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$ 。又令$M = \min\{n | n \geq 1$, 且$S_n = 0\}$ 。試求$E(s^M)$, $|s| \leq 1$ 。

3.設X為一r.v.取值在$0, 1, \cdots, r-1$, 且$P(X = i) = r^{-1}, i = 0, 1, \cdots, r-1$, 其中$r$為一正整數 。若$r = ab$, 其中$a, b$皆為正整數, 試證$X$之分佈可表為兩個獨立的取整數值的r.v.'s之和的分佈 。

8.設X為一取非負整數值之r.v., 以g為其母函數 。又設給定X之下, Y有$\mathcal{B}(X, p)$之分佈 。試求Y之母函數 。

9.設r.v.X有雙指數分佈, 其p.d.f.為$\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, x \in R$ 。試求X之ch.f. 。

11.設X, Y之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \begin{cases} (1+\varepsilon)\phi_2(x, y), & 若 xy \geq 0, \\ (1-\varepsilon)\phi_2(x, y), & 若 xy < 0, \end{cases}$$

其中$0 < \varepsilon < 1$為一常數, $\phi_2(x, y) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in R$, 而$\phi(x)$為$\mathcal{N}(0, 1)$分佈之p.d.f. 。試證

(i)X, Y皆有$\mathcal{N}(0, 1)$分佈;

(ii)X與Y不獨立;

(iii)$X^2 + Y^2$有χ_2^2分佈 。

12.設對$\forall\ k \geq 0,\ a_k \geq 0$, 且$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, 又$\lambda_k$為實常數 。試證$\psi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt), \psi_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}, t \in R$, 皆為ch.f.'s, 並分別求其對應之分佈 。

15.設X_1, X_2, X_3, X_4為i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$分佈之r.v.'s 。試求$Z = X_1X_2 + X_3X_4$之ch.f. 。

16.設ψ為一ch.f., G為一d.f., 且$G(0-) = 0$ 。試證下述函數皆為ch.f.'s, 其中$t \in R$:

(i)$\int_0^1 \psi(ut)du$;

(ii) $\int_0^{\infty} \psi(ut)e^{-u}du$;

(iii)$\int_0^{\infty} e^{-|t|u}dG(u)$;

(iv)$\int_0^{\infty} e^{-t^2u}dG(u)$;

(v)$\int_0^{\infty} \psi(ut)dG(u)$ 。

17.試給二r.v.'sX與Y, 不獨立但有相同的d.f.F, 且滿足$X+Y$之d.f.為$F_2 = F * F$ 。

18.設X, Y為二i.i.d.之r.v.'s 。令$Z = X - Y$ 。試以特徵函數, 證明Z有對稱分佈 。

19. $X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.之$\mathcal{C}(\theta, a)$分佈之r.v.'s 。試證樣本平均$\overline{X}_n$與X_1有相同分佈 。

22.設一r.v.X之ch.f.為$\psi(t) = e^{-|t|}, t \in R$ 。試利用倒轉公式求X之p.d.f. 。

23.設有二r.v.'sX_1, X_2, 其聯合ch.f.為

$$\psi(t_1, t_2) = (\frac{1}{3}(e^{i(t_1+t_2)} + 1) + \frac{1}{6}(e^{it_1} + e^{it_2}))^2, t_1, t_2 \in R \text{ 。}$$

試求$E(X_1), \mathrm{Var}(X_1)$及$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, 只要這些值存在 。

24.設有一r.v.X, 其動差為

$$E(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{k!},\ E(X^{2k+1}) = 0,$$

$k = 0, 1, \cdots$ 。試求X之分佈及ch.f. 。

26.設$P(X_n = 0) = P(X_n = 1 + 1/n) = 1/2, n \geq 1$ 。試問$n \to \infty$時, $\{X_n, n \geq 1\}$是否會分佈收斂至那一分佈?

28.設X_n有$\Gamma(n, \beta)$分佈, 以F_n表$(X_n/\beta - n)/\sqrt{n}$ 之d.f. 。試問$n \to \infty$時, F_n會弱收斂至何d.f.?

29.設X_n有χ_n^2分佈, 令$Y_n = (X_n - n)/\sqrt{2n}$, 且以$F_n$表$Y_n$之d.f., $n \geq 1$ 。

(i) 試求Y_n之ch.f. 。

(ii)試問$n \to \infty$時, F_n會弱收斂至何d.f.?

30.設X_n有$\mathcal{N}(n + 1, n + n^{1/2})$分佈, 令$Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}, n \geq 1$, 且以$F_n$表$Y_n$之d.f. 。

(i)試求Y_n之ch.f.$\psi_n(t), n \geq 1$ 。

(ii)試問$n \to \infty$時, $\{F_n, n \geq 1\}$是否弱收斂至那一d.f.?

32.設X, Y為二i.i.d.之r.v.'s以F為其共同d.f., 且$E(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ 。試證若$(X + Y)/\sqrt{2} \stackrel{d}{=} X$, 則$X$有$\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈 。

44.令$Z = X^{1/\alpha}Y$, 其中X有$\mathcal{E}(1)$分佈, Y之Laplace轉換為e^{-s^α}, $s \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$, 且設X與Y獨立 。試求Z之Laplace轉換 。

45.設一r.v.X之p.d.f.為$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$ 。

(i)試證$E(e^{tX}) = (1 - t^2)^{-1}, |t| < 1$ 。

(ii)利用(i)試求$E(X^n), n \geq 1$ 。

(iii)利用(i)試求$E(e^{itX}), t \in R$ 。

46.設$Y = \log X$有$\mathcal{N}(0, 1)$分佈, 底下n為正整數 。

(i)試求X之p.d.f.$f(x)$(X有對數常態分佈) 。

(ii)試求$E(X^n)$, $n \geq 1$ 。

(iii)試證$E(X^n), n \geq 1$, 不滿足Carleman條件 。

(iv)令$f_a(x) = f(x)(1 + a\sin(2\pi \log x))$, $x > 0$, $|a| \leq 1$ 。試證$f_a(x)$, $x > 0$, 為一p.d.f., 且$\int_0^\infty x^n f_a(x)dx = E(X^n)$, $\forall n \geq 1$ 。

(v)試證$E(e^{tX})$不存在, $\forall t > 0$ 。

47.承上題, U, V為i.i.d.以對數常態為共同分佈, 令$Z = UV$ 。試以變數代換, 求Z之p.d.f., 並驗證$\log Z$有$\mathcal{N}(0, 2)$分佈 。

48. 設r.v.X之p.d.f.為$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)}$, $x > \alpha$, α為一常數 。試求$E(e^{tX})$, 並找出使此期望值存在之t 。

49. 設r.v.X之動差母函數為$M(t) = \sinh t/t$, $t \neq 0$, $M(0) = 1$ 。試求X之分佈 。

50. 設r.v.X之動差母函數為$M(t) = \cosh t, t \in R$ 。試求X之分佈 。

51. 設r.v.X之動差母函數為$M(t) = e^{t+t^2}, t \in R$ 。試求X之分佈 。