第三章

條件機率及條件期望值

1.設X, Y為二獨立的r.v.'s, 分別有$\mathcal{P}(\lambda_1)$及$\mathcal{P}(\lambda_2)$分佈 。試求給定$X+Y = n, n \geq 0, X$之條件分佈 。

2.設X, Y為二獨立的r.v.'s, 且皆有自1開始之$\mathcal{G}e(p)$分佈, $0 < p < 1$ 。試求給定$X + Y = n, n \geq 2, X$之條件分佈 。

3.設某實驗有三個可能的結果, 第i個結果發生之機率為p_i, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$ 。獨立地做此實驗n次, 且令X_i表第i個結果出現之次數, $i = 1, 2, 3$ 。試求給定$X_2 = m$, $m \leq n$, X_1之p.d.f. 。並指出此為那一常見分佈 。

4.設X, Y之聯合p.d.f.為$f(x, y) = 6xy(2 - x - y), 0 < x, y < 1$, 且對其他的$x, y, f(x, y) = 0$ 。試求給定$Y = y, X$之條件p.d.f. 。

5.在上題中, 試求$E(e^{X/2}|Y = 1)$ 。

6.設X_1, X_2為i.i.d.$\mathcal{U}(0, 1)$分佈之r.v.'s 。令$X = \max\{X_1, X_2\}$, $Y = \min\{X_1, X_2\}$ 。試求$P(Y \leq y|X = x)$, 及$P(Y \leq y|X > x)$ 。

7.投擲二公正的骰子, 令X, Y分別表兩次之和及兩次之最大值 。試求給定$Y = y, y = 1, \cdots, 6$, X之條件分佈 。

8.設X, Y有二變數Cauchy分佈, p.d.f.為$f(x, y) = (2\pi(1 + x^2 + y^2)^{3/2})^{-1}$, $x, y \in R$ 。試求給定$Y = y, X$之條件分佈 。

9.試證在上題中Y與$Z = X/\sqrt{1+Y^2}$獨立, 並求Z之邊際p.d.f. 。

10.設X, Y有二變數Dirichlet分佈, p.d.f.為$Cx^{\alpha-1}\ y^{\beta-1}\ (1-x-y)^{\gamma-1}$, $0 < x, y < 1$, $x + y < 1$, 其中α, β, $\gamma > 0$, 且$C = (\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\ /(\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\gamma))$ 。試求給定$Y = y, 0 < y < 1, X$之條件分佈 。

11.試證在上題中Y與$Z = X/(1-Y)$獨立 。

12.設X, Y為二獨立的r.v.'s, 且皆有$\mathcal{N}(0,1)$分佈, 令$Z = X + Y$ 。試求

(i) 給定$Z = z, z \in R, X$之條件分佈;

(ii) 給$X = x, x \in R, Z$之條件分佈 。

13.設$X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.連續型的r.v.'s, 以f為其共同p.d.f., 令F為其共同d.f. 。$Y = \min\{X_1, \cdots, X_n\}, Z = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ 。試求給定$Y = y, Z$之條件分佈 。

14.設給定$X = x, Y$有$\mathcal{N}(x, \tau^2)$分佈, 又X有$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$分佈 。試證$Y$有$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$分佈 。

15.設給定$X = x > 0, Y$有$\Gamma(\alpha, x^{-1})$分佈, 且X有$\mathcal{E}(\lambda)$分佈 。試求

(i)Y之分佈;

(ii)給定$Y = y, X$之條件p.d.f., 並指出此為那一常見分佈 。

16.設給定$X = x > 0, Y$有$\mathcal{U}(0, x)$分佈, 且X之p.d.f.為$f_X(x) = x^{-2}, x \geq 1$ 。試求Y之p.d.f., 並求給定$Y = y, X$之條件分佈 。

17.設X有$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$分佈 。試求給定$X^2 = z > 0, X$之條件分佈 。

18.設X有$\mathcal{U}(0,1)$分佈 。試求給定$\sin(4\pi X) = 1/2, X$之條件分佈 。

19.設X有$\mathcal{U}(0,1)$分佈, 且給定$X = x, 0 < x < 1, Y$有自0開始之$\mathcal{G}e(x)$分佈 。試求$P(X > \frac{1}{2}|Y = y), y = 0, 1, \cdots$ 。

20.自一有N個球的袋中隨機地依序取出n個球, 取出的球並不放回 。令X表袋中之白球數, Y表取出的球中之白球數 。若X有$\mathcal{B}(N, p)$分佈, 試證Y有$\mathcal{B}(n, p)$分佈 。

21.設X, Y有二變數Cauchy分佈(見第8題) 。試求$E(|Y|\,|X = x), x \in R$ 。

22.設X, Y在$x-y$平面上單位圓$\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq 1\}$均勻分佈。試求$E(Y|\ X=x)$, 及$E(Y^2|\ X=x)$, $|x|<1$。

23.設X,Y有如第10題之二變數Dirichlet分佈。試求$E(Y|X=x)$及$\mathrm{Var}(Y|X=x), 0<x<1$。

24.設給定$X=x, Y$有$\mathcal{E}(x)$分佈, 且X有$\Gamma(\alpha,\beta)$分佈, $\alpha>2, \beta>0$。試求$E(Y)$及$\mathrm{Var}(Y)$。

25.設X,Y為二獨立的r.v.'s, 期望值均為0, 變異數均為σ^2。令$Z=X+Y$, 試證$E(Z^2|X=x)=x^2+\sigma^2, \forall x\in R$, 只要此條件期望值存在。

26.設有X,Y二r.v.'s, 滿足$E(Y)=0$, 且$E(Y^2)=E((E(Y|X))^2)$。試對X,Y之聯合分佈函數給一推論。

27.有3人分別投擲一公正的銅板。若其中1人投擲出與其他2人相異的面, 他便從其他2人各取1元; 若3人投擲出相同的面, 則便繼續投擲直至分出結果, 如此一局方結束。令X_i表在某一局中第i個人之所得, $i=1,2,3$。試求$E(X_1)$, $E(X_1X_2)$, 及$E(X_1X_2X_3)$。次令N表在某一局中, 3人各要投擲的次數, 試求N之分佈。

28.曾有某犯人被判死罪, 在執行前國王給他一生存的機會。國王令此犯人將50個白球及50個黑球放進兩個外表完全一樣之不透明容器。然後將此二容器任意調換位置。最後令死囚先任選一容器再任抽取其中1球。若抽出的是白球, 則立即獲釋, 若抽出的是黑球, 則仍執行死刑。

(i) 問如何放置球於容器, 可使獲釋機會最大?

(ii) 次若改為4個容器, 其餘條件不變, 則該如何置球?

29.設$X_1, X_2, \cdots$為i.i.d.之r.v.'s, N為一取值在正整數之r.v., 又設X_1及N之期望值均存在。試問$E(X_1+\cdots+X_N)$是否必等於$E(X_1)E(N)$? 若是則證明, 不是則舉一例。

30.設X有$\Gamma(p,\lambda)$分佈, $p\leq 1$, 其p.d.f.以f表之。試證

(i)$f(x)=\int_0^\infty g_\lambda(y)ye^{-yx}dy$, 其中

$$g_\lambda(y)=\begin{cases}\frac{(\lambda y-1)^{-p}}{y\Gamma(1-p)\Gamma(p)}, & \lambda y\geq 1,\\ 0, & \lambda y<1;\end{cases}$$

(ii)$g_\lambda(y)$為一p.d.f., $\forall\lambda>0$ 。

註. 本題指出當$p\leq 1$時, gamma分佈可由指數分佈混合而得到 。

31.設X,Y之聯合p.d.f.為$f(x,y)=k(k-1)(y-x)^{k-2},0<x\leq y<1,k\geq 2$ 。試求

(i) $E(X|Y=y)$;

(ii) $E(E(X|Y))$ 。

32.設X,Y之聯合p.d.f.為$f(x,y)=x+y,0<x,y<1$ 。試求

(i) $E(X|Y=y)$;

(ii) $E(Xe^{Y+Y^{-1}}|Y=y)$ 。

33.設X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈, 且給定$X=x,Y$有$\mathcal{B}(x,p)$分佈 。試證Y與$X-Y$獨立, 並求給定$Y=y,X$之條件分佈 。

34.設X,Y之聯合p.d.f.為$f(x,y)=4xy,0<x,y<1$ 。試驗證$E(E(X|Y))=E(X)$ 。

35.試證當X,Y皆為有界的r.v.'s, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,E(Y|X))$ 。(事實上此結果只要設$E(X^2)$及$E(Y^2)$皆有限即可)

36.設$X_1,\cdots,X_n$為i.i.d.之r.v.'s, 令$S_m=\sum_{i=1}^m X_i,1\leq m\leq n$ 。試證$E(S_m|S_n)=(m/n)S_n$ 。

37.設X, Y為二獨立的r.v.'s, 分別有$\mathcal{E}(\lambda_1)$及$\mathcal{E}(\lambda_2)$分佈, 令$Z=\min\{X,Y\}$ 。試求在給定$Z=X$之下, X之條件分佈, 及條件期望值 。

38.設X,Y之聯合分佈為在$x-y$平面上以(0,0), (2,0)及(1,2)為三頂點之三角形內均勻分佈 。試求$E(Y|X)$ 。

39.設X,Y為二獨立的r.v.'s, 且分別有$\Gamma(\alpha_1,\lambda)$及$\Gamma(\alpha_2,\lambda)$分佈 。試求$E(X|Z)$, 其中$Z=X+Y$ 。

40.設X有$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$分佈, 又設給定$X=x, Y_1,\cdots,Y_n$為i.i.d.之r.v.'s, 且皆有$\mathcal{N}(x,\tau^2)$分佈 。試證給定$Y_i=y_i, i=1,\cdots,n, X$之條件分佈為$\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$其中$\mu_1=(\mu\tau^2+\sigma^2 z)/(\tau^2+n\sigma^2)$, $\sigma_1^2=\sigma^2\tau^2/(\tau^2+n\sigma^2), z=\sum_{i=1}^n y_i$ 。

41.設X_1,X_2,X_3為i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$分佈之r.v.'s, 令$Y_1\le Y_2\le Y_3$表其順序統計量 。試求給定$Y_2=y, 0<y<1, Y_1, Y_3$之聯合分佈 。

42.設$X_1,\cdots,X_n$為i.i.d.連續型的r.v.'s, 以F為共同的d.f., 其p.d.f.亦設為連續 。又令$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$, 表其順序統計量, $D=\{x|x\in R,$且$f(x)>0\}$ 。試求

(i) 給定$X_{(i)}=y_i$, $X_{(1)},\cdots,X_{(i-1)}$之條件p.d.f., 其中$2\le i\le n$;

(ii) 給定$X_{(i)}=y_i$, $X_{(i+1)},\cdots,X_{(n)}$之條件p.d.f., 其中$1\le i\le n-1$ 。

43.設在給定X之下, Y與Z為條件獨立 。則對每一Borel函數 w, 及使下式左 、右條件期望值皆有定義之X,Y,試證

$$E(w(Z)|X=x,Y=y)=E(w(Z)|X=x) \text{ 。}$$

44.設有X_1,X_2,X_3 三r.v.'s , $E(X_i)=0, \mathrm{Var}(X_i)=1, i=1,2,3$,且$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0.8, \mathrm{Cov}(X_1,X_3)=-0.4, \mathrm{Cov}(X_2,X_3)=-0.6$ 。試求

(i) 在給定X_3之下, X_1之最佳M.S.E.線性預測值;

(ii) 在給定X_2之下, X_3之最佳M.S.E.線性預測值 。

45.一袋中有4紅球及4黑球, 自此袋中依序取出4球, 每次取出後並不放回 。令X表最初兩次中之紅球數, Y表總共之紅球數 。試求

(i) X,Y之聯合分佈;

(ii) 在給定$X=x$之下, Y之最佳M.S.E.預測值 。

46.在第33題中, 試求

(i) 在給定X之下, Y之最佳M.S.E.預測值;

(ii) 在給定Y之下, X之最佳M.S.E.預測值 。

47.設Z_1,Z_2為二獨立的r.v.'s, 且皆有$\mathcal{E}(\lambda)$分佈 。令$X=Z_2, Y=Z_1+Z_1Z_2$ 。試求

(i) $E(Y|X=x)$;

(ii) $E(E(Y|X))$;

(iii) $\mathrm{Var}(E(Y|X))$;

(iv) $\mathrm{Var}(Y|X=x)$;

(v) $E(\mathrm{Var}(Y|X))$;

(vi) 給定$X=x$之下, Y之最佳M.S.E.預測值;

(vii) 給定$X=x$之下, Y之最佳M.S.E.線性預測值 。