第二章

隨機變數

1.給一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 。試證Ω上的一實值函數X為一r.v., 若且唯若對$\forall x \in R$, $\{X < x\} \in \mathcal{F}$ 。

2.設X為一定義在$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上之r.v. 。試證對任二a, b, $a < b$, $\{a \leq X \leq b\}$, $\{a < X \leq b\}$, $\{a \leq X < b\}$, $\{a < X < b\}$及$\{X = a\}$皆屬於$\mathcal{F}$ 。

3.令$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F}$ 為包含$\{1, 2, 3, 4\}$ 及$\{3, 4, 5, 6\}$ 之最小的$\sigma-$體, P為定義在$\mathcal{F}$上之某一機率函數 。

(i) 試寫出$\mathcal{F}$ 。

(ii) 試問函數

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\ , \ \omega = 1, 2, \\ 5\ , \ \omega = 3, 4, \\ 7\ , \ \omega = 5, 6, \end{cases}$$

是否為$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上之一r.v.?

(iii) 試給一機率函數 P, 使得對$\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ 或1 。

4.設$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。令$X(\omega) = 2$, $\omega = 1, 2, 3, 4$, $X(\omega) = 7$, $\omega = 5, 6$ 。

(i)試給一最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}$, 使得X為一r.v. 。

(ii)試在(i)中之$\mathcal{F}$上, 定義一機率函數P 。

(iii)對(ii)中之P, 試給出X之分佈函數F 。

(iv)試給出$Y = X^2$之p.d.f. 。

5.設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 。令$X(\omega) = \omega^2 + 200$, $\omega \in \Omega$; $Y(\omega) = 1$, 若$\omega \in \{2,4,6\}$, $Y(\omega) = 2$, 若$\omega \in \{1,3,5\}$ 。試分別對X, Y,給出最小的$\sigma-$體, 使其為r.v.'s 。

6.設$\Omega = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ 。令$X(\omega) = \omega^2$, $\omega \in \Omega$; $Y(\omega) = -1$, 若$\omega = -3,-2,-1$, $Y(\omega) = 1$, 若$\omega = 1$, $Y(\omega) = 2$, 若$\omega = 2,3$ 。

(i)試給最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_1$, 使得X為一r.v. 。

(ii)試給最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_2$, 使得Y為一r.v. 。

(iii)試給最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_3$, 使得$U = Y^2$為一r.v. 。

(iv)試給最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_4$, 使得X, Y皆為r.v.'s 。

7.設X, Y為定義在$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上之二r.v.'s, A為一事件 。令

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega)\ , & \omega \in A, \\ Y(\omega)\ , & \omega \in A^c \text{ 。} \end{cases}$$

試證Z 為一r.v. 。

8.試證分佈函數不一定為左連續 。

9.試完成例3.8中之證明 。

10.設$S = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$為$\Omega$之一有限分割, $A_i \neq \emptyset, i = 1, \cdots, n$, 且令$\mathcal{F}$為包含$A_1$, $A_2, \cdots, A_n$之最小的$\sigma-$體 。

(i) 試證一由Ω 映至R 之函數X 為一r.v., 若且唯若X 在每一A_i 為常數 。

(ii) 利用(i)證明, 若$\mathcal{F}$不為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, 則存在一由Ω映至R之函數Y, 使得$|Y|$為一r.v., 但Y不為一r.v. 。

11.設X為一定義在Ω上之正的r.v. 。又定義r.v.

$$X_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{A_{nk}} + nI_{B_n},$$

其中$A_{nk} = \{(k-1)/2^n < X \leq k/2^n\}$, $k = 1, 2, \cdots, n2^n$, $B_n = \{X > n\}$ 。試證$0 \leq X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \cdots$, 且$n \to \infty$時, $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$,

$\forall \omega \in \Omega$ 。

12.設有一d.f.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2(|x|+1)}, x \in R \text{ 。}$$

試求F 之一p.d.f.f, 並求出使$F'(x) = f(x)$之所有x的集合 。

13.設某男士與某小姐約會, 時間訂為下午5點至6點間,兩人並同意較早到者最多等對方10分鐘 。從5點起計, 至6點終止 。若兩人之抵達時刻為獨立, 且皆在下午5點與6點間均勻分佈, 試求兩人會碰面之機率 。

14.試證下述函數為一連續型r.v.之p.d.f.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他 。} \end{cases}$$

15.令

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-(\alpha x+\beta)}}, x \in R,$$

其中$\alpha > 0, \beta \in R$, 為二常數 。試證F為一d.f.(稱為logistic分佈(logistic distribution)), 求其p.d.f.f, 並證明$f(x) = \alpha F(x)(1-F(x))$, $x \in R$ 。

16.試證下述函數為一二變數之p.d.f.:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi}\cos y I_A(x,y), A = (-\pi\,,\,\pi] \times (-\pi/2, \pi/2] \text{ 。}$$

17.設$\Omega = [0,c]$, $c > 0$, $\mathcal{F}$為$[0,1]$上之所有Borel集合的集合, 且令$P([0,a]) = a^i/c^i$, $\forall a \in [0,c]$, 其中i為某固定正整數 。試在Ω上定義一r.v.X, 使得X有$\mathcal{U}[0,1]$分佈 。

18.試在一適當的機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上, 定義一r.v. X, 使X有$\mathcal{N}(0,1)$分佈 。

19.試在一適當的機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上, 定義一r.v.X, 使X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈, $\lambda > 0$ 。

20.設$\Omega=\{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{w\})=1/4$, $\forall\omega\in\Omega$ 。試在Ω上定義二非常數之r.v.'s X,Y, 使得X與Y獨立 。

21.設$\Omega=\{1,2\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\})=1/2$, $\forall\omega\in\Omega$ 。試問可否在Ω上定義二非常數之r.v.'s X,Y, 使得X與Y獨立?

22.設$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\})=1/6,\omega\in\Omega$ 。令$X(\omega)=\omega$, $Y(\omega)=2\omega,\omega\in\Omega$ 。試求(X,Y)之聯合分佈 。

23.設$\Omega=\{0,1\}$, $\mathcal{F}=\{\emptyset,\Omega,\{0\},\{1\}\}$, 且$P(\{0\})=r=1-P(\{1\})$, 其中$0<r<1$ 。試寫出所有定義在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的r.v.'s 。並指出其中相互獨立者, 分佈相同者, 及i.i.d.者 。

24.設有二r.v.'sX及Y, 定義在同一機率空間 。試證對每一實數上的Borel集合 B, $|P(X\in B)-P(Y\in B)|\le P(X\neq Y)$

25.設f 為$\Gamma(n,1)$ 分佈之p.d.f., $n\ge 1$ 。試證對$\forall\lambda>0$,

$$\int_{\lambda}^{\infty}f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\text{ 。}$$

26.設X有$\Gamma(\alpha,\beta)$分佈, $\alpha>1$ 。試證X之p.d.f.$f(x)$, 在$x=(\alpha-1)\beta$有極大值 。

27.設Y,Z為i.i.d.之$\mathcal{U}(0,1)$分佈r.v.'s 。試求x之二次方程式$x^2+2xY+Z=0$有實根之機率 。

28.設X,Y,Z為i.i.d.之$\mathcal{E}(1)$分佈r.v.'s 。試求$P(X\le 2Y$且$X\le 2Z)$ 。

29.設X,Y為i.i.d.之$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$分佈r.v.'s 。試求$P(X^2+Y^2\le 1)$ 。

30.隨機取二正整數, 試求其會互質之機率 。(提示. 利用$\sum_{i=1}^{\infty}i^{-2}=\pi^2/6$)

31.設(X,Y)有p.d.f.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}(1+x^2+y^2)^{-3/2},x,y\in R\text{ 。}$$

(i) 試證f的確為一p.d.f., 此即標準二變數Cauchy分佈之p.d.f. 。

(ii) 試證X, Y之邊際分佈皆為Cauchy分佈 。

(iii) 設X, Y有標準二變數Cauchy分佈 。試問X與Y是否獨立?

32.將$2r$個球隨機地放進r個盒子中, $r \geq 1$, 令X_i表第i個盒子中之球數 。試求

(i) $X_1, \cdots, X_r$之聯合p.d.f.;

(ii) 每個盒子中恰有2球之機率 。

33.設$X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.之r.v.'s, 且$Y = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$有參數$\lambda$ 之指數分佈 。試證X_i's之共同分佈為指數分佈, 並給出參數 。

34.設X, Y 為i.i.d.之r.v.'s, 且$P(X = i) = 1/(N+1), i = 0, 1, \cdots, N$ 。

(i) 試求$P(X \geq Y)$ 及$P(X = Y)$ 。

(ii) 試求$\min\{X, Y\}$, 及$\max\{X, Y\}$ 之邊際p.d.f.'s 。

35.設X, Y為二獨立的r.v.'s, 分別有自1開始之$\mathcal{G}e(p_1)$及$\mathcal{G}e(p_2)$分佈, $p_1 \neq p_2$ 。

(i)試求$P(X \geq Y)$, $P(X = Y)$及$P(X < Y)$ 。

(ii)試求U=$\min\{X, Y\}$, 及V=$X + Y$之邊際p.d.f.'s 。

36.定理5.4之假設下, 令$M = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$表$X_1, \cdots, X_n$之半全距(mid-range) 。試證

$$P(M \leq m) = n \int_{-\infty}^{m} (F(2m - x) - F(x))^{n-1} f(x) dx \text{ 。}$$

37.設$X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.之$\mathcal{U}(0, 1)$分佈r.v.'s, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$表其順序統計量 。令$X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$ 。又令$U_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}$, $1 \leq k \leq n + 1$ 。

(i)試求U_k之p.d.f. 。

(ii)試指出U_k有那一常見分佈, 並給出參數 。

(iii)試求$P(U_k > t)$, $0 \leq t \leq 1$ 。

38.在上題之假設下, 令$R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 表全距, 而$M = (X_{(n)} + X_{(1)})/2$表半全距 。試求$R$ 與M 之聯合分佈 。

39.自一固定長度的線段中, 隨機地取兩點而將其分成三段 。試求此三段

可構成一三角形的機率 。

40.試以例5.3之三個不同的假設, 求在圓上隨機地畫一條弦, 其長度大於圓半徑的機率 。

41.設X有$\Gamma(\alpha,\beta)$分佈 。試求$Y=\sqrt{X}$之p.d.f. 。

42.設X 有$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 分佈, 令$Y=e^X$ 。試求Y之p.d.f., Y稱為有對數常態分佈(lognormal distribution) 。

43.設X有$\mathcal{U}(0,1)$分佈, 令$Y=X^{-1}-X$ 。試求Y之p.d.f. 。

44.設X有$\mathcal{U}[0,1]$分佈 。試求一函數w, 使得$Y=w(X)$之p.d.f.為$f(x)=2x, 0\le x\le 1$, 且$f(x)=0$, 若$x\notin[0,1]$ 。

45.設X有$\mathcal{E}(\lambda)$分佈, 而Y為一整數值之r.v., 且$Y=m$, 若$m\le X<m+1$, 其中m為一非負整數 。試求Y 之分佈 。

46. 設X_1,X_2 為i.i.d.之$\mathcal{E}(\lambda)$分佈r.v.'s, 令$Y_1=X_1-X_2, Y_2=X_2$ 。

(i) 試求Y_1,Y_2 之聯合p.d.f. 。

(ii) 試證Y_1 之p.d.f.為$\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|y|}, y\in R$, 此即雙指數分佈(double exponential distribution 或稱Laplace distribution) 。

47.設X,Y為二獨立之$\mathcal{E}(\lambda)$分佈r.v.'s, 令$Z=X-Y$ 。試求Z之d.f., 因而得到p.d.f. 。

48. 設X_1與X_2獨立, 且分別有$\mathcal{B}e(r_1,s_1)$及$\mathcal{B}e(r_2,s_2)$分佈 。令$Y_1=X_1$, $Y_2=X_2(1-X_1)$ 。試求Y_1,Y_2之聯合p.d.f. 。

49.設X_1,X_2為i.i.d.之$\mathcal{N}(0,1)$分佈r.v.'s 。試求(U,V)之聯合p.d.f., 其中$U=X_1-X_2$, $V=X_1+X_2$ 。並問U與V是否獨立 。

50.設X_1,X_2,X_3 為i.i.d.之$\mathcal{U}(0,1)$ 分佈r.v.'s 。試求$Y=X_1+X_2+X_3$之p.d.f., 並求$P(Y\le 2)$ 。

51.設U,V為二獨立之$\mathcal{N}(0,1)$分佈r.v.'s, 令$Z=\rho U+\sqrt{1-\rho^2}V, |\rho|<1$ 。試求

(i) U,Z之聯合p.d.f.;

(ii) Z之p.d.f.;

(iii) $X=\mu_1+\sigma_1 U$及$Y=\mu_2+\sigma_2 Z$之聯合p.d.f., 其中$\sigma_1,\sigma_2>0$ 。此即二變數常態分佈 。

52.設U,V為二獨立的r.v.'s, 且U有Rayleigh分佈, p.d.f.為

$$f_U(u)=\sigma^{-2}ue^{-u^2/(2\sigma^2)},\ u>0,$$

V有$\mathcal{U}(-\pi,\pi)$分佈 。試證$X=U\cos V$與$Y=U\sin V$為二獨立的r.v.'s, 且皆有$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$的分佈 。

53.設Y_1有$\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$之分佈, Y_2有$\mathcal{B}e(\alpha,\beta)$之分佈, 且$Y_1$與$Y_2$獨立 。試證$Y_1Y_2$與$(1-Y_2)Y_1$獨立, 且$Y_1Y_2$有$\Gamma(\alpha,\lambda)$分佈 。

54.設X,Y 為i.i.d. 之$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$分佈r.v.'s 。令$T=\arcsin(X/\sqrt{X^2+Y^2})$ 。試證

(i) X^2+Y^2 與$X/\sqrt{X^2+Y^2}$ 獨立;

(ii) X^2+Y^2 與X/Y 獨立;

(iii) T 有$\mathcal{U}(-\pi/2,\pi/2)$ 分佈;

(iv) X/Y 有$\mathcal{C}(0,1)$ 分佈;

(v) $X/|Y|$ 有$\mathcal{C}(0,1)$ 分佈;

(vi) $X/(X+Y)$有$\mathcal{C}(1/2,1/2)$分佈 。

55.設X,Y之聯合p.d.f.為

$$f(x,y)=1/\pi,\ x^2+y^2\le 1,$$

令$U=(X^2+Y^2)^{1/2}, V=\arctan(Y/X)$ 。試求U,V之聯合分佈, 並問U與V是否獨立?

56.設X,Y為二獨立之$\mathcal{U}[0,1]$分佈r.v.'s 。令$U=(X^2+Y^2)^{1/2}, V=\arctan(Y/X)$ 。試求U, V之聯合及邊際p.d.f.'s 。

57.設V_1, V_2, $\cdots$, V_{n+1}為i.i.d.之$\mathcal{E}(1)$分佈r.v.'s 。令$S_m=\sum_{i=1}^m V_i$, $1\le m\le n+1$ 。

(i) 試證$T=\left(\frac{V_1}{S_{n+1}},\ldots,\frac{V_n}{S_{n+1}}\right)$之p.d.f.為

$$f_T(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases} n!\ ,\ t_i>0, i=1,\cdots,n, \text{且} \sum_{i=1}^n t_i<1, \\ 0\ \ ,\ \text{其他}\ 。\end{cases}$$

(提示. 先求$\left(\frac{V_1}{S_{n+1}},\cdots,\frac{V_n}{S_{n+1}},S_{n+1}\right)$之p.d.f.)

(ii) 試證$U=\left(\frac{S_1}{S_{n+1}},\cdots,\frac{S_n}{S_{n+1}}\right)$之p.d.f.為

$$f_U(u_1,\cdots,u_n)=\begin{cases} n!\ ,\ 0<u_1<u_2<\cdots<u_n<1, \\ 0\ \ ,\ \text{其他}\ 。\end{cases}$$

58.設G為一連續型的d.f., 以$g(u)$為p.d.f.,$u\in[0,1]$ 。試證

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(g(|x-y|)+g(1-|1-x-y|)),\ 0<x,y<1,$$

為一二變數之p.d.f., 且X,Y之邊際分佈皆為$\mathcal{U}(0,1)$ 。

59.設Z有$\mathcal{C}(0,1)$, 則$T=1/Z$亦有$\mathcal{C}(0,1)$分佈 。

(i)試說明此現象是否合理 。

(ii)是否有其他分佈, 使得若Z有此分佈, 其倒數亦有該分佈 。

60.設X與Y獨 立, X有$\mathcal{N}(0,1)$分 佈, 而$f_Y(y)=(2/\sqrt{2\pi})e^{-y^2/2}G(y), y\in R$, 其中$G(y)>0$, 且$G(-y)=1-G(y)$, $\forall y\in R$ 。試證X/Y有$\mathcal{C}(0,1)$分佈 。

61.設有r.v.'sX及Y, 令$U=X+Y, V=X-Y$ 。

(i) 試舉二獨立之X,Y, 且U與V不獨立 。

(ii) 試舉二不獨立之X,Y, 且U與V獨立 。

62.(i)設U與V獨立, 且U,V皆有對稱分佈 。試證$U+V$亦有對稱分佈 。

(ii)設U與V獨立, 且U有對稱分佈 。試證UV亦有對稱分佈 。

63.試舉例顯示, 若U與V不獨立, 則即使U,V皆有對稱分佈, U/V, UV不一定有對稱分佈 。

64.設U與V分佈相同, 且$U+V=a$, 其中$a>0$為一常數 。

(i)試證$P(U>0)\geq 1/2$ 。

(ii)試問習題54-(vi)之結論, 是否吻合(i)中之結果 。

65.X與Y皆有$\mathcal{N}(0,1)$分佈, 但X與Y不獨立 。試問$X+Y$是否可能有$\mathcal{N}(0,2)$分佈 。

66.設r.v.'s X及 Y皆有 $\mathcal{N}(0,1)$分佈 。各給一例子, 使得 $X+Y$分別有$\mathcal{N}(0,2)$及$\mathcal{N}(0,4)$分佈 。

67.設有三r.v.'sX, Y, Z 。則

(i) 由$X+Y=X+Z$, 是否導致$Y=Z$?

(ii) 由$X+Y\overset{d}{=}X+Z$, 是否導致$Y\overset{d}{=}Z$? (若再加上X與Y,Z獨立會如何? 此時問題變成稍難些, 可參考Chung(2001), p.194) 。

(iii) 由$X=Y+Z$, 且$X\overset{d}{=}Y$, 是否導致$Z=0$?

68.設X與Y皆有$\mathcal{N}(0,1)$分佈 。試問$X+Y$可能有多少個分佈 。

69.對一d.f.F, 令$F^{-1}(x)=\inf\{t|t\in R,$且$F(t)\geq x\}$, $x\in(0,1)$ 。試證

(i) 對$\forall x$, $t\in R$, $F^{-1}(x)\leq t$, 若且唯若$x\leq F(t)$;

(ii) F^{-1}為非漸減且左連續;

(iii) 若F為連續, 則$F(F^{-1}(x))=x$, $\forall x\in[0,1]$ 。

70.設X有$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$分佈 。試求$Y=|X|$之p.d.f.及$E(Y)$ 。

71.設X有$\mathcal{B}(4,\,p)$分佈 。試求$E(\sin(\pi X/2))$ 。

72.設X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈 。試求$E((X+1)^{-1})$ 。

73. 設X有$\mathcal{B}e(r,s)$分佈 。試證

$$E(X^k)=\frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{(r+s)(r+s+1)\cdots(r+s+k-1)},k=1,2,\cdots \text{ 。}$$

74.給定一$r>0$, 試舉一r.v.X, 使得$E(X^r)$存在, 但$E(X^{r+1})$ 不存在 。(提示. 考慮級數$\sum_{i=1}^{\infty}i^{-(r+2)}$, 並據此造出一p.d.f.)

75.設X,Y為二獨立之r.v.'s, 且$E(X^4)=2,E(Y^2)=1,E(X^2)=1,E(Y)=0$ 。試求$\mathrm{Var}(X^2Y)$ 。

76.設U_1,U_2為二獨立的r.v.'s, 且皆有$\mathcal{E}(\lambda)$分佈 。令$Y=\max\{U_1,U_2\}$ 。

試求$E(Y)$及$\mathrm{Var}(Y)$ 。

77.自區間$[0,1]$隨機地取出n個點, 令U,V分別表極大值及極小值 。試求$E(U)$及$E(V)$ 。

78.設X,Y為二獨立的r.v.'s, 且X有$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$分佈, Y有$\Gamma(\alpha,\beta)$分佈 。令$Z = XY$ 。試求$E(Z)$及$\mathrm{Var}(Z)$ 。

79.設生男與生女的機會皆為$1/2$ 。某國由於國情的關係, 每一家庭皆希望能有男孩, 但政府為抑制人口的成長, 規定每一家庭只能有一男孩, 若前幾胎皆為女孩, 則可繼續生, 直至生出一男孩便須停止 。試問這種政策執行的後果, 是否會造成社會上女多於男? 並給出理由 。

80.一公車載有25名乘客, 須停7個不同的站 。假設每一名乘客均獨立地在某一站下車, 且在每一站下車之機率均為$1/7$ 。公車只有在有乘客要下車才停 。試求公車停的站數之期望值 。

81.設一盒中有N張卡片, 每張上各有一數字, 分別為1至N 。依序自盒中取出卡片, 每取出一張後放回 。試求

(i) 再度取出第一次之數字, 所需取數之期望值;

(ii) 第一次取出以前取過的數字, 所需取數之期望值 。

82.隨機地取500個人, 底下問題皆不考慮閏年的情況 。試求

(i) 至少有2人生日在1月1日之機率;

(ii) 在1月1日出生人數之期望值;

(iii) 在一年當中, 至少有1人出生之日數的期望值;

(iv) 在一年當中, 至少有2人出生之日數的期望值 。

83.設$X_1,X_2,\cdots,X_n$為i.i.d.之r.v.'s, 且$E(X_1)=\mu,\mathrm{Var}(X_1)=\sigma^2$ 。令$\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 。

(i) 試證$\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2$ 。

(ii) 利用(i)試證$E(\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2) = (n-1)\sigma^2$ 。

84.設X有自1開始之$\mathcal{G}e(\theta)$分佈, $\theta>0$ 。又M為一正整數 。令$Y=\min\{X,M\}, Z=\max\{X,M\}$ 。試求$E(Y)$及$E(Z)$ 。

85.設X,Y為i.i.d.之$\mathcal{U}[-1,1]$分佈r.v.'s 。令$M=U-V$, 其中$U=\max\{X, Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$ 。試求

(i)M之p.d.f.;

(ii)$E(M)$, 並解釋此期望值是否合理 。

86.設U有$\mathcal{U}(0,1)$分佈, 令$X=\sin(2\pi U), Y=\cos(2\pi U)$ 。試證$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ 。又問X與Y是否獨立?

87.將n個球隨機地放進r個盒子中, $n\geq 1$, $r\geq 2$ 。令$X_i=1$, 若第i個盒子是空的, 否則$X_i=0, i=1,\cdots,r$ 。試求

(i)$E(X_i)$;

(ii)$E(X_iX_j)$, $i\neq j$;

(iii)$E(S_r)$及$\mathrm{Var}(S_r)$, 其中S_r表空盒子的數目 。

88.設f為一連續函數 。欲估計積分$I=\int_0^1 f(x)dx$, 先得到$\mathcal{U}(0,1)$分佈之n個觀測值$X_1,\cdots,X_n$, 且令$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ 。試證$E(T)=I$, 且$\mathrm{Var}(T)=\frac{1}{n}\int_0^1(f(x)-I)^2dx$ 。

89.試證對$n\geq 2$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j) \text{ 。}$$

90.試證$\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^m \alpha_iX_i, \sum_{j=1}^n \beta_jY_j)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$, $m,n\geq 1$ 。

91.試證下述定理8.1之一推廣: 若$E(X^n)$存在, $n\geq 1$, 則

$$E(X^n)=n(\int_0^\infty x^{n-1}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^0 x^{n-1}F(x)dx) \text{ 。}$$

92.設X,Y之聯合p.d.f.為$f(x,y)=Cx^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-1}, x,y>0$, 且$x+y\leq 1$, 其中$C$為一常數 。

(i) 試證$C=\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)/(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma))$ 。

(ii) 試證X,Y之二邊際分佈皆為beta分佈 。

(iii) 試問X與Y是否獨立?

(iv) 試求X,Y之相關係數ρ 。

93.設X, Y之聯合p.d.f.如上題 。令$W = X/(1-X), Z = Y/(1-Y)$ 。試求W, Z之聯合p.d.f. 。

94.設$k \geq 2, \alpha_i > 0, i = 1, \cdots, k, C = \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)/(\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_k))$ 。試證

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}) = C \prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\alpha_i - 1}(1 - x_1 - \cdots - x_{k-1})^{\alpha_k - 1},$$
$$x_i > 0, i = 1, \cdots, k-1, \text{且} x_1 + \cdots + x_{k-1} < 1,$$

為一$(k-1)$ 變數之p.d.f. 。**註.** 一隨機向量$(X_1, \cdots, X_k)$稱為有k變數Dirichlet分佈, 參數為$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, 若且唯若$X_1, \cdots, X_{k-1}$之p.d.f.為上述$f$, 且$X_k = 1 - X_1 - \cdots - X_{k-1}$ 。

95.設X為一對稱的r.v., 且$E(X^3) < \infty$ 。試證X與X^2無相關 。

96.設X有$\mathcal{U}(-a, a)$分佈, $a > 0$ 。試證X與X^2無相關, 但X與X^2不獨立 。

97.設X_1, X_2, X_3為獨立之r.v.'s, 且$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$ 。試求$X_1 - X_2$ 與$X_2 + X_3$ 之相關係數 。

98.設r.v.'sX, Y滿足$\rho(X, Y) = 1/2, \mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{Var}(Y) = 2$ 。試求$\mathrm{Var}(X - 2Y)$ 。

99.設一盒中有3紅球及2黑球, 自此盒中隨機地取出2球, 令U, V分別表其中之紅球及黑球數 。試求$\rho(U, V)$ 。

100.有一公正的銅板, 兩面分別寫數字1及2 。獨立地投擲2次, 令X表2次之和, Y表2次之極大值 。試求$\rho(X, Y)$ 。

101.一盒中有3個球, 編號分別為1至3 。隨機地取出2球, 每次取出後不放回, 令X, Y 分別表2球之號碼 。試求$\rho(X, Y)$ 。

102. 設$X_1, \cdots, X_n$ 為i.i.d.之$\mathcal{E}(\lambda)$分佈r.v.'s 。試證$T = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$有$\chi_{2n}^2$分佈 。

103.設g為R上之一非漸減的正函數 。試證$P(Z \geq c) \leq E(g(Z))/g(c)$ 。

104.設X為一正的r.v., 且$E(X) < \infty$ 。試證$E(1/X) \geq 1/E(X)$, 且等

式成立, 若且唯若X為一常數 。**註.**一般而言有$E(X^\alpha) \geq (E(X))^\alpha, \alpha \geq 1$或$\alpha \leq 0; E(X^\alpha) \leq (E(X))^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, 見Gurland(1968) 。

105.設r.v.X滿足$E(X^2) < \infty$, 顯然$E([X]) \leq E(X)$, 其中$[\cdot]$表高斯函數 。試問$\mathrm{Var}([X]) \leq \mathrm{Var}(X)$ 是否必成立?

106.設有二r.v.'sX及Y, d.f.'s各為F及G 。若$F(x) \leq G(x), \forall\ x \in R$, 則稱$X$比$Y$隨機較大(stochastically larger) 。若X與Y獨立, 試證此時$P(X \geq Y) \geq 1/2$ 。

107.投擲一公正的銅板一次, 令X表所得正面數 。然後重投擲該銅板兩次, 令Z表所得正面數 。試證Z比X隨機較大 。

108.設X為一r.v., 且$P(X = 1) = P(X = 3) = 1/18, P(X = 2) = 16/18$ 。令$\mu = E(X)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ 。試證存在一$\delta > 0$, 使得$P(|X-\mu| \geq \delta) = \sigma^2/\delta^2$ 。此例顯示Chebyshev不等式給出之上界無法改進 。

109.設有X, Y, Z三r.v.'s, 期望值均為0, 變異數均為1 。令$\rho_1 = \rho(X, Y)$, $\rho_2 = \rho(Y, Z)$, $\rho_3 = \rho(X, Z)$ 。試證

$$\rho_3 \geq \rho_1\rho_2 - \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} \text{ 。}$$

(提示. $XZ = (\rho_1 Y + (X - \rho_1 Y))(\rho_2 Y + (Z - \rho_2 Y))$, 並利用Schwarz不等式)

110.設某機場在1小時內會抵達的飛機數有Poisson分佈, 期望值為90 。試利用Chebyshev不等式, 求在1小時內抵達的飛機數, 介於80與100 間之機率的一下界 。

111.設g為一由R至$(0,\infty)$之Borel函數, 且g為一偶(even)函數(即$g(-x) = g(x)$), 又設對$x \geq 0, g$為非漸減 。則對任意r.v.X, 只要$E(g(X)) < \infty$, 及任意$a > 0$, 試證

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(X))}{g(a)} \text{ 。}$$

112.設$a, r > 0$且n為正整數, 試證

$$a(a+r)(a+2r)\cdots(a+nr) \sim Ce^{-n}r^{n+1}n^{n+1/2+a/r},$$

其中常數$C = \sqrt{2\pi}/\Gamma(a/r)$ 。

113. 試證對任意二正整數a, b,

$$\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} \sim \frac{b!}{a!} n^{a-b} \text{ 。}$$