# 第一章

# 機率空間

**1.**令$A$表投擲4個公正的骰子一次, 其中至少有一個1點的事件, $B$表投擲二公正的骰子24 次, 其中至少有一次得到兩個1點的事件 。問何者機率較大? **註.**此即著名的**梅雷詭論**(de Méré paradox), 梅雷認為4次投擲, 而每次有6個可能的結果, 其比例與24次投擲, 而每次有36個可能的結果相同, 因此二者之機率應相同 。但他的觀測卻不是如此, 於是他請巴斯卡解釋其中的矛盾 。

**2.**某國稅局官員相信(i)40%的納稅人未列出全部所得, (ii)36%的納稅人多列可扣除項目, 且(iii)22%的納稅人前二者皆犯 。問合理的情況下, 他認為有多少百分比的納稅人只犯(i)或(ii)中之一項 。

**3.**對一$\sigma-$體$\mathcal{F}$, 試證若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$, 則$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ 。

**4.**設$\Omega$為一非空集合, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$為二$\Omega$之子集所形成之$\sigma-$體 。試證$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$不一定為一$\sigma-$體 。

**5.**設$T$為一**指標集合**(index set), 不一定可數 。對$\forall \alpha \in T$, 設$\mathcal{F}_\alpha$為一非空集合$\Omega$之子集所形成之$\sigma-$體 。試證$\bigcap_{\alpha \in T} \mathcal{F}_\alpha$為一$\sigma-$體 。

**6.**設$\Omega$為實數$R$上一區間, $\mathcal{F}$為所有包含$\Omega$所有子區間的$\sigma-$體之交集 。試證$\mathcal{F}$為一$\sigma-$體, 且若$\mathcal{F}_1$為任一包含$\Omega$之所有子區間的$\sigma-$體, 則$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ 。

**7.**設$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。試給一包含$\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$及$\{4, 5, 6\}$之最小的$\sigma-$體 。

**8.**設$\Omega$為一有限集合 。試證任一$\Omega$之子集所形成之體$\mathcal{F}$, 必為一$\sigma-$體 。

**9.**設$\Omega$為一非空集合 。

(i)令$\mathcal{F}$為包含$\Omega$之所有有限, 以及餘有限之子集的集合 。試證$\mathcal{F}$為一體 。

(ii)令$\mathcal{F}$為包含$\Omega$之所有可數, 以及餘集為可數之子集的集合 。試證$\mathcal{F}$為一$\sigma-$體 。

**10.**設$\Omega$為一不可數集合 。試證$\Omega$包含$A$及$A^c$皆為不可數的子集$A$ 。

**11.**令$\mathcal{B}^1$為包含實數上所有開區間之最小的$\sigma-$體 。

(i) 試證$\mathcal{B}^1$包含所有區間$[a,b),(a,b],[a,b],a<b$, 及單一的點集合$\{c\}$, $c\in R$ 。

(ii) 令$C$為包含所有區間$(a,b],a<b$, 之最小的$\sigma-$體, 試證$C=\mathcal{B}^1$ 。

**12.**試證下述4敘述等價:

(i) 對$\forall a\in R,\{\omega|\omega\in\Omega,f(\omega)>a\}\in\mathcal{F}$,

(ii) 對$\forall a\in R,\{\omega|\omega\in\Omega,f(\omega)\geq a\}\in\mathcal{F}$,

(iii) 對$\forall a\in R,\{\omega|\omega\in\Omega,f(\omega)<a\}\in\mathcal{F}$,

(iv) 對$\forall a\in R,\{\omega|\omega\in\Omega,f(\omega)\leq a\}\in\mathcal{F}$ 。

**13.**投擲一公正的銅板, 直至出現一正面才停止 。令$X$表投擲數, $A_n$表第$n$次停止之事件, $n\geq 1$ 。

(i)試求$n\leq X\leq m$之機率, 其中$n\leq m$為二正整數 。

(ii)試問$A_1,\cdots,A_n$是否獨立 。

**14.**設$\Omega$為一無限集合 。令$\mathcal{F}$為一包含$\Omega$之所有有限, 以及餘有限之子集的體 。在$\mathcal{F}$上定義函數$P$, 滿足$P(A)=0$, 若$A$為有限, $P(A)=1$, 若$A^c$為有限 。試證

(i) $P$有有限的加性;

(ii) 若$\Omega$為可數的無限, 則$P$無可數的加性;

(iii) 若$\Omega$為不可數, 則$P$有可數的加性 。

**15.**設$\Omega$為一不可數的集合 。令$\mathcal{F}$為一包含$\Omega$之所有可數, 以及餘可數之子集的$\sigma-$體 。在$\mathcal{F}$上定義函數$P$, 滿足$P(A)=0$, 若$A$為可數; $P(A)=1$,

若$A^c$為可數 。試證

(i)$P$有可數的加性;

(ii)$P$為一機率函數 。

**16.**設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 。試給出一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中$\mathcal{F}$為包含$\{2,3\}$, 及$\{3,4\}$之最小的$\sigma-$體, 且$P(\{2,3\}) = 0.3$, $P(\{3,4\}) = 0.5$ 。

**17.**設$A_1, A_2, \cdots, A_k$為樣本空間$\Omega$之互斥子集 。試證

(i) 若$\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$, 則包含$A_1, A_2, \cdots, A_k$之最小的$\sigma-$體, 共有$2^k$個元素;

(ii) 若$\bigcup_{i=1}^k A_i \neq \Omega$, 則包含$A_1, A_2, \cdots, A_k$之最小的$\sigma-$體, 共有$2^{k+1}$個元素 。

**18.**設有事件$A_1, A_2, \cdots$ 。試證

(i) $P(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^n A_k)$;

(ii) $P(\bigcap_{k=1}^\infty A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^n A_k)$ 。

**19.**試證定理7.3之證明中$\bigcup_{i=1}^\infty A_i^* = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ 。

**20.**設在定義6.5中, $P$滿足(i), (iii)及(6.6)式 。試證下述二條件等價:

(i)(6.5)式成立;

(ii)$P$對空集合由上連續, 即若事件$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$,且$\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$, 便有$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ 。

**21.**設有$n$張牌, 其上分別寫數字1至$n$ 。依序每次翻開1張牌, 令$A_k$表第$k$次翻開的牌為數字$k$ 之事件, $n$張皆翻完便停止 。求$A_1, \cdots, A_n$至少有一發生之機率 。

**22.**如例6.15中, 自區間$\Omega = [0,1]$中隨機地取一個點 。且對$\Omega$上之一Borel集合 $B$, 令$P(B) = B$之長度=此點會落在$B$之機率 。令$A_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $A_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ 。一般對$n \geq 3$, 令$A_n$為集合$(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c$之$2^{n-1}$個子區間的中間$\frac{1}{3}$開區間的聯集 。最後令$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, 集合$C = \Omega \setminus A$即為著名的**Cantor**(1845-1918)**集合**(Cantor set), 此集合有許多有趣的性質 。試證$P(A) = 1$, 因此$P(C) = 0$ 。

**23.**在上題中, 若改為$A_1 = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}), A_2 = (\frac{9}{64}, \frac{15}{64}) \cup (\frac{49}{64}, \frac{55}{64})$,至於$A_n, n \geq 3$,

則類推, 即將中間$\frac{1}{3}$部分改為$\frac{1}{4}$部分 。試求$P(A)$ 。

**24.**一袋中有3白球2黑球, 依序取出2球, 每次取出後放回, 設每球被取中的機率皆相同 。寫出一機率空間 。

**25.**試證第1.9節所定義之集合$\mathcal{F}_B$為一$\sigma$−體 。

**26.**設有10個銅板, 第$i$個銅板出現正面的機率為$i/10, i = 1, \cdots, 10$ 。任取1銅板經投擲後得到正面, 求此銅板是第5個的條件機率 。

**27.**設盒I中有5個白球及7個黑球, 盒II中有3個白球及12個黑球 。投擲一公正的銅板, 若得到正面則自盒I中任取1球, 若得到反面則自盒II中任取1球 。若取到的是白球, 求銅板投擲得反面的機率 。

**28.**設有$A, B$二事件, $P(A), P(B) > 0$ 。試證下列三敘述中,(i)成立,但(ii)及(iii)通常不成立 。

(i) $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$;

(ii) $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$;

(iii) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$ 。

**29.**某生參加考試題目均為測驗題, 每題有5個選擇, 其中有70%的題目該生會做答, 而對不會的題目, 該生則任選一答案 。

(i)試求任一題目答對的機率;

(ii)若某一題答對, 試求此題是猜中的機率 。

**30.**檢驗某疾病, 設若有病則有0.9的機率檢驗呈正反應, 若無病亦有0.05的機率呈正反應 。設受驗者中有1%有病 。隨機地取一人, 且檢驗呈正反應, 問其有病之機率 。

**31.**某餐廳根據過去記錄, 預先訂位者有20%最後並未前來用餐 。若此餐廳有50個座位, 且某晚接受52個訂位, 求容得下之機率 。

**32.**設$(\Omega, \mathcal{F}, P)$為一機率空間, $B \in \mathcal{F}$, 且$P(B)>0$。令$Q(A)= P(A|B)$, $A \in \mathcal{F}$。若$C\in \mathcal{F}$且$Q(C)> 0$, 令$Q(A|C)= Q(A\cap C)/Q(C)$。試證$Q(A|C) = P(A|B\cap C)$, $\forall A \in \mathcal{F}$ 。

**33.**投擲一公正的銅板10次, 得到5個正面 。試求下述二條件機率 。

(i) 第1次得到正面;

(ii) 首5次恰得到3個正面 。

**34.**設事件$A$與$A$獨立, 試問此時對$P(A)$有何推論?

**35.**投擲一骰子1次, 令事件$A$表得到1或6, $B$表得到奇數 。

(i)若此為一公正的骰子, 試證$A$與$B$獨立;

(ii)若此骰子未假設是公正, 則$A$與$B$是否獨立?試證或否證之 。

**36.**依定義證明, 若$A, B, C$獨立, 則$A, B^c, C^c$亦獨立 。**註.**因此若$A$與$B$獨立, 則$A$與$B^c$, $A^c$與$B$, 及$A^c$與$B^c$皆獨立 。

**37.**設$A_1, A_2, \cdots, A_n$為獨立事件, 且$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$ 。試證

(i) $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq n^{-n}$;

(ii) 若$n = 2$, 則$P(A_1 \cup A_2) \geq 3/4$ 。

**38.**投擲一公正的銅板2次, 令事件$A$表第1次為正面, $B$表第2次為正面, $C$表恰有1次為正面 。試證

(i) $A, B, C$為每對獨立事件;

(ii) $A, B$不為互斥事件;

(iii) $A \cap B \cap C = \emptyset$;

(iv) $A, B, C$不為獨立事件 。

**39.**投擲一公正的骰子1次, 令事件$A$表得到偶數, $B$表得到奇數, $C$表得到7點 。試證$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, 但$A, B, C$不為獨立 。

**40.**設$A, B$為二獨立的事件, 且二者皆發生的機率為1/6, 二者皆不發生的機率為1/3 。試問可否唯一決定$P(A)$及$P(B)$?

**41.**設$A, B$為二獨立的事件, 且二者皆發生的機率為1/6, 而$A$發生但$B$不發生的機率為1/3 。試問可否唯一決定$P(A)$及$P(B)$?

**42.**某一團體中有4位大一男生, 6位大一女生, 6位大二男生, 及$x$位大二女生 。設自此團體任取一位學生, 其性別與年級獨立, 試求$x$ 。

**43.**投擲一公正的骰子2次, 令$A$表第1次得到奇數, $B$表第2次得到奇數, $C$表兩次之和為奇數 。試問此三事件是否獨立 。

**44.**試證定理10.1 。

**45.**假設生男生女之機率皆為$1/2$ 。對一有$n$個小孩之家庭, $n \geq 2$, 令$A$表該家庭中最多有1個女孩之事件, $B$表該家庭並非所有小孩性別皆相同之事件 。試決定$n$, 使得$A$與$B$獨立 。

**46.**設$A, B, C$為獨立事件, 且$P(A \cap B) \neq 0$ 。試證$P(C|A \cap B) = P(C)$ 。

**47.**設有$A, B, C$三事件, 且$P(A \cap B \cap C) \neq 0, P(C|A \cap B) = P(C|B)$ 。試證$P(A|B \cap C) = P(A|B)$ 。

**48.**設$A_1, A_2, \cdots, A_n$為獨立事件 。試證$C_1, C_2, \cdots, C_k$亦為獨立, $\forall k \leq n$, 其中$C_1 = \bigcap_{i=1}^{r_1} A_i$, $C_2 = \bigcap_{i=r_1+1}^{r_2} A_i$, $\cdots, C_k = \bigcap_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} A_i$, $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n$ 。

**49.**設$A_1$, $A_2, \cdots, A_m$為互斥事件, $B_1, B_2, \cdots, B_n$亦為互斥事件 。又設$A_i$與$B_j$獨立, $\forall i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 令$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ 。試證$A$與$B$獨立 。

**50.**投擲一公正的骰子, 若第1次出現1或6點便贏了 。若第1次出現$k$點, $2 \leq k \leq 5$, 則繼續投擲直至出現1, $k$或6點 。若$k$點在1或6點之前出現, 便贏了, 否則算輸 。求贏之機率 。