

第九章

區間估計

9.1 信賴區間

在第六章我們討論點估計。對於一參數，除了給出點估計，有時我們想對估計值與真實值究竟多接近能有些了解。第七章估計量的均方差(MSE)，便能提供一些此方面的資訊。另一種方式，就是考慮區間估計(interval estimation)。我們先給一定義。

定義1.1 一區間(不論是有限或無限)，若至少有一端點為一隨機變數，便稱為一隨機區間(random interval)。

隨機區間這個概念，倒並非新穎。設有一隨機變數 X ，過去我們常求諸如事件“ $1 < X < 2$ ”之機率。此事件又等價於“ $2 < 2X$ ，且 $X < 2$ ”，亦即“ $X < 2 < 2X$ ”。若 $1 < X < 2$ 之機率為 p ，即 $P(1 < X < 2) = p$ ，則

$$(1.1) \quad p = P(X < 2 < 2X)。$$

區間 $(X, 2X)$ 便為一隨機區間。而(1.1)式可解釋為隨機區間 $(X, 2X)$ 會包含2這一點之機率為 p 。隨機區間 $(X, 2X)$ 包含2這一點的機率，與隨機變

數 X 落在區間 $(1, 2)$ 的機率, 恰好相等。

例1.1 設 X 有 $\mathcal{E}(1)$ 分佈。試求隨機區間 $(1.2X, 2.4X)$ 包含2.4之機率, 並求此區間長度之期望值。

解. 首先 $1.2X < 2.4 < 2.4X$ 等價於 $1 < X < 2$ 。而

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-2}。$$

又此隨機區間之長度為 $2.4X - 1.2X = 1.2X$, 而 $E(X) = 1$, 故

$$E(1.2X) = 1.2E(X) = 1.2。$$

即此隨機區間長度之期望值為1.2。

在上例中, 若改為 X 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈, 其餘不變, 結果有何不同? 由附表4, 可得 $P(1 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) \doteq 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$ 。又因 $E(X) = 0$, 故 $E(1.2X) = 0$ 。即隨機區間 $(1.2X, 2.4X)$ 長度之期望值為0, 這不是很奇怪嗎? 要知對 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈, X 可能取負值, 因此 $1.2X$ 有可能大於 $2.4X$ 。即使是隨機區間, 左端點仍要小於右端點, 才是一合理的區間。故對 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 只有當 $X > 0$ 時, $(1.2X, 2.4X)$ 才是一合理的區間。

例1.2 設 X 有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分佈, $\sigma > 0$ 。試求 σ 落在隨機區間 $(|X|, 5|X|)$ 之機率。又此區間長度之期望值及變異數分別為何?

解. 首先事件 $|X| < \sigma < 5|X|$ 等價於事件 $0.2\sigma < |X| < \sigma$ 。而後者為二互斥事件 $0.2\sigma < X < \sigma$ 及 $-\sigma < X < -0.2\sigma$ 之聯集。又因 X 有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分佈, 故此二互斥事件之機率相等。因此

$$\begin{aligned} P(|X| < \sigma < 5|X|) &= 2P(0.2 < \frac{X}{\sigma} < 1) \\ &= 2(\Phi(1) - \Phi(0.2)) \\ &\doteq 2(0.8413 - 0.5793) \\ &= 0.524。 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} E(|X|) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u/2} du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

且

$$E(|X|^2) = E(X^2) = \text{Var}(X) = \sigma^2。$$

故區間長度之期望值為

$$E(5|X| - |X|) = 4E(|X|) = 4\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

變異數為

$$\begin{aligned} \text{Var}(5|X| - |X|) &= \text{Var}(4|X|) = 16\text{Var}(|X|) \\ &= 16(E(|X|^2) - (E(|X|))^2) \\ &= 16(\sigma^2 - (\sigma\sqrt{2/\pi})^2) \\ &= 16\sigma^2(\pi - 2)/\pi。 \end{aligned}$$

例1.3 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。則樣本平均 $\bar{X}$ 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ 分佈。試求隨機區間 $[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$ 會包含 μ 之機率, 及此隨機區間長度之分佈。

解. 首先事件

$$\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}},$$

等價於事件

$$-2 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 2。$$

又 $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。故

$$\begin{aligned}
& P\left(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= 2\Phi(2) - 1 \\
&\doteq 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544,
\end{aligned}$$

其中 Z 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。又此隨機區間之長度為

$$\left(\bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}},$$

為一常數(且與 μ 無關)已不再是隨機變數。只要 σ 與 n 給定, 區間長度便確定。又可看出, 對一給定的 σ , 只要 n 夠大, 區間長度可任意小。

對一擬估計的參數, 我們也可以一隨機區間來估計它。當然必須要給出此區間會包含參數之真實值的機率。有時是先給定一機率值, 然後找一隨機區間, 且此區間包含參數真實值的機率, 等於所給定之機率值。我們給一定義。

定義1.2 設有二統計量 $L = L(\mathbf{X})$, $U = U(\mathbf{X})$, 滿足 $L \leq U$, 其中 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 。對一實值的參數 θ , 若觀測到 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, 便得到推論 $L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})$, 則隨機區間 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 便稱為 θ 之一區間估計量(interval estimator)。

例1.4 承例1.3。假設 σ 已知, 而欲估計 μ 。則隨機區間 $[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$ 包含 μ 之機率約為 0.9544。如果觀測到 $\bar{X} = 7.1$, $\sigma = 2$, $n = 16$, 則得 μ 之區間估計為 $[6.1, 8.1]$ 。

在上例中, 通常我們便說區間 $[6.1, 8.1]$ 為 μ 之一 95.44% 之信賴區間。我們再給兩個定義。

定義1.3 設 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 為 θ 之一區間估計量。則 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 包含 θ 之機率, 便稱為 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 之涵蓋機率(convergence probability)。此機率可以符號 $P_\theta(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})])$, 或 $P(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})] | \theta)$ 表之。

定義1.4 設 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 為 θ 之一區間估計量, $\theta \in \Omega$ 。令涵蓋機率之最大下界為 p , 即

$$(1.2) \quad p = \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) = \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X}))。$$

則稱隨機區間 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 為 θ 之一**信賴係數**(confidence coefficient)為 p 之**信賴區間**。也稱 $100p\%$ 信賴區間。 $U(\mathbf{X})$ 及 $L(\mathbf{X})$ 分別稱為 θ 之**上信賴界**(upper confidence bound, 簡寫為UCB)及**下信賴界**(lower confidence bound, 簡寫為LCB)。信賴界又稱**信賴限**(confidence limit)。

信賴區間又稱**置信區間**, 信賴係數又稱**信賴水準**(confidence level), 或**信賴度**(degree of confidence)、**置信度**。置信就是相信的意思。所謂難以置信, 不足置信。

我們的信賴區間是以閉區間表示。對連續型的分佈 $P_{\theta}(L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X}))$, 若改為 $P_{\theta}(L(\mathbf{X}) < \theta < U(\mathbf{X}))$ 並無差異。信賴係數亦有單邊的。若

$$(1.3) \quad \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(\theta \leq U(\mathbf{X})) = p,$$

則稱 $(-\infty, U(\mathbf{X}))$ 為 θ 之一信賴係數為 p 之**單邊上信賴區間**(one-sided upper confidence interval), $U(\mathbf{X})$ 稱為 θ 之一**單邊上信賴界**(one-sided upper confidence bound)。若

$$(1.4) \quad \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(L(\mathbf{X}) \leq \theta) = p,$$

則稱 $[L(\mathbf{X}), \infty)$ 為 θ 之一信賴係數為 p 之**單邊下信賴區間**(one-sided lower confidence interval), $L(\mathbf{X})$ 則稱為 θ 之一**單邊下信賴界**(one-sided lower confidence bound)。

給一介於0與1間的 p 值, 有時並不存在一滿足(1.2)式之 θ 的區間估計量 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 。這時我們便找 L 及 U , 使得

$$(1.5) \quad \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) \geq p,$$

且左側之值儘可能地接近 p 。在很多實際的應用中, 常將(1.2)式中的 p 以 $1 - \alpha$ 取代, 其中 $0 < \alpha < 1$ 。即

$$(1.6) \quad 1 - \alpha = \inf_{\theta \in \Omega} P_{\theta}(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) .$$

本質上(1.6)式與(1.2)式並無差異。若以(1.6)式來表示,通常 α 為一較小的值,如0.001, 0.01, 0.05, 0.10等,有如假設檢定中型 I 錯誤的機率。此時信賴係數 $1 - \alpha$ 為一較接近1的值。

有時我們只簡單地說“ $1 - \alpha$ 之信賴區間”,省去“信賴係數”四字。

點估計是以一單一的值來估計一母體的參數。不論我們方法多好,就是很難完全精確地估計母體參數。沒錯,通常樣本數增加,可增加估計的精確性,但仍然沒有理由期望由一組樣本所得的點估計,會恰等於所欲估計的母體參數。區間估計便因應而生。以一區間來估計參數,總是較以一點來估計參數,更可“信賴”。

例如,我們想估計愛滋病(AIDS)之平均潛伏期 μ ,也就是從被傳染至症狀發生的平均時間。若只給出點估計 $\hat{\mu} = 5.7$ 年,則對 μ 究竟多大可能還不是很清楚。但若給出區間估計,如 μ 介於3.7年至12.4年,信賴係數為95%,便可能對 μ 之大小有一較完整的概念。

點估計就像醫生的鐵口直斷:醫生向病人家屬說,病人只能再活一年。實際的情況是,可能8個月後病人便死了,也可能又活了2年6個月。大約少有剛好一年後死的。若能給一區間,如6個月至3年,雖不再是那麼明確,使醫生好像不夠權威,但換得一些保證,或說一些信心,使醫生講的話較可能是對的(即病人再活的時間長度,會落在醫生所講的區間中)。這是採用區間估計量的目的。

如何找信賴區間,並無一定的準則。充分統計量在此提供一重要的角色。假設存在一個 θ 之一維的充分統計量 $S = S(X_1, \dots, X_n)$ 。則找一可表為 S 及 θ 之函數的隨機變數 $T(\theta) = T(X_1, \dots, X_n, \theta)$,又設 $T(\theta)$ 的分佈與 θ 無關,則下信賴界 L 及上信賴界 U ,通常可以 T 之簡單的函數表示出來。其他“合理”的統計量,如MLE,也可拿來考慮。

還有一些必須要再加以說明者。

首先要注意的是,信賴區間隨機的部分是區間的上下界,而非參數。故當我們寫一機率的敘述,如

$$P_{\theta}(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]),$$

此機率的敘述是針對 $\mathbf{X}$ 而非 θ 。換句話說, 要如例1.2及1.3的作法, 將一看起來像是關於隨機的 θ 之敘述, 利用代數上的等價關係, 改為關於隨機的 X 之敘述:

$$P_{\theta}(L(\mathbf{X}) \leq \theta, U(\mathbf{X}) \geq \theta)。$$

另外, 雖然我們主要考慮信賴“區間”, 但有時我們可能考慮較一般的集合。此時可稱**信賴集合**(confidence set), 或**信賴區域**(confidence region)。

在本書中並不區分信賴水準及信賴係數。但有些書, 若

$$P_{\theta}(L(\theta) \leq \theta \leq U(\mathbf{X})) \geq p,$$

便稱 $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ 之信賴水準為 p 。依其定義, 一信賴區間之信賴水準並不唯一。

最後要留意的是。由於 θ 之真實值並不知道(所以才要估計), 因此信賴區間之涵蓋機率是與 θ 有關的。我們只能保證涵蓋機率大於或等於信賴係數。在有些情況下, 涵蓋機率為 θ 之一常數函數, 即與 θ 無關, 但有時涵蓋機率, 因 θ 之不同而變化很大。

底下給一例。

例1.5 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta]$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。我們對 θ 之區間估計有興趣, 且考慮二種型式的區間: $[aX_{(n)}, bX_{(n)}]$ 及 $[X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]$, 其中 $1 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ 皆為常數。由於 θ 要滿足 $\theta \geq X_{(n)}$, 因此須有 $a \geq 1$, $c \geq 0$ 。

對第一種區間,

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \in [aX_{(n)}, bX_{(n)}]) &= P_{\theta}(aX_{(n)} \leq \theta \leq bX_{(n)}) \\ &= P_{\theta}\left(\frac{1}{b} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq \frac{1}{a}\right) \\ &= \int_{1/b}^{1/a} nt^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}。 \end{aligned}$$

此處用到 $T = X_{(n)}/\theta$ 之 p.d.f. 為 $f_T(t) = nt^{n-1}$, $0 < t \leq 1$ (習題第7題)。故區間 $[aX_{(n)}, bX_{(n)}]$ 之涵蓋機率與 θ 無關。因此 $a^{-n} - b^{-n}$ 也是此區間之信賴係數。

其次我們來看區間 $[X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]$ 。對 $\theta \geq d$ (這是合理的, 為什麼?), 同理可得

$$\begin{aligned} P_\theta(\theta \in [X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]) &= P_\theta(X_{(n)} + c \leq \theta \leq X_{(n)} + d) \\ &= P_\theta(1 - \frac{d}{\theta} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq 1 - \frac{c}{\theta}) \\ &= \int_{1-d/\theta}^{1-c/\theta} nt^{n-1} dt \\ &= (1 - \frac{c}{\theta})^n - (1 - \frac{d}{\theta})^n. \end{aligned}$$

因此區間 $[X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]$ 之涵蓋機率與 θ 有關。上述涵蓋機率之最大下界看起來沒那麼好求, 不過因 θ 很大時, 此機率很小, 且

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} ((1 - \frac{c}{\theta})^n - (1 - \frac{d}{\theta})^n) = 1 - 1 = 0,$$

故區間估計量 $[X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]$ 之信賴係數為 0。

自下一節起, 我們要給一些找信賴區間的方法。

9.2 有樞紐量的方法

本節我們先以較直觀的方法, 對一些較簡單的情況, 給出信賴區間。首先對一統計量 T , 及一常數 $a > 0$, 通常以 $T \pm a$ 表隨機區間 $[T - a, T + a]$ 。

例2.1 常態分佈期望值之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。欲給 μ 之信賴區間。先設 σ^2 已知。由於樣本平均 $\bar{X}$ 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ 分佈, 因此 $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈, 故

$$(2.1) \quad P_\mu\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

與 μ 無關。即得

$$(2.2) \quad \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

為 μ 之一信賴係數為 $1 - \alpha$ 之信賴區間, $\bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ 為上信賴界, $\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ 為下信賴界, 此區間可以 $I = \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ 表之。

例如, 若 $\alpha = 0.05$, 則 $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.960$ 。又設 $n = 25$, $\sigma = 1$, 則 μ 之一95%之信賴區間為 $\bar{X} \pm 0.392$ 。另外因

$$P_{\mu}(\mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = P_{\mu}(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

故 $(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ 為 μ 之一信賴係數為 $1 - \alpha/2$ 之單邊上信賴區間。同理 $(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \infty)$ 為 μ 之一信賴係數為 $1 - \alpha/2$ 之單邊下信賴區間。

其次假設 σ^2 未知, 此時 σ^2 為一擾亂參數。則可以樣本標準差

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}},$$

σ 之MLE(見第六章例3.6)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}},$$

或 σ 之UMVUE(見第七章例3.5)

$$\sigma'_1 = \frac{\sqrt{n-1}\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)} S,$$

等合理的統計量來取代 σ 。不論採用何者, 皆可得到型如 $\bar{X} \pm cS/\sqrt{n}$ 之信賴區間。底下我們來看, 該如何選取 c , 才能使此區間之信賴係數為 $1 - \alpha$? 首先

$$P(\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq c\right)。$$

又由第四章例3.2, $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ 有 T_{n-1} 分佈。如前, 令 $t_{p,m}$ 表 T_m 分佈之第 p 分位數, $0 < p < 1, m \geq 1$ 。則

$$(2.3) \quad P_{\mu}\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{1-\alpha/2, n-1}\right) = 1 - \alpha,$$

與 μ 無關。故

$$(2.4) \quad \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

為 μ 之 $1-\alpha$ 信賴區間, 分別以 $\bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} S/\sqrt{n}$ 及 $\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} S/\sqrt{n}$ 為上信賴界及下信賴界。

例如, 設 $n = 16, \alpha = 0.01, S = 1.2$, 則 $t_{0.995, 15} = 2.947$, 故在 σ^2 未知之下, μ 之 99% 信賴區間為 $\bar{X} \pm 0.8841$ 。

在上例中, 之所以能成功地找出參數之信賴區間, 而沒有遇上如(1.2)式中的取最大下界的步驟, 就是因我們能找到一分佈與 θ 無關之 X 與 θ 的函數。這種函數稱為**樞紐**(pivot), 也稱**樞紐量**(pivotal quantity)。即若 $T = T(X, \theta)$ 之分佈與 θ 無關, 便稱 T 為一樞紐量。例2.1中的 $(\bar{X} - \mu)/(\sigma\sqrt{n})$ 及 $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ 皆為樞紐量。另外, 說不定你已聯想到了, 在有位置參數或尺度參數的情況, 常可找到樞紐量:

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由表2.1中, 三個型式之一的 p.d.f., 所產生之隨機樣本。我們給出各樞紐量, 證明留在習題中。

表2.1 一些分佈族的樞紐量

p.d.f.之型式	分佈族	樞紐量
$f(x - \mu)$	位置族	$\bar{X} - \mu$
$\sigma^{-1}f(x/\sigma)$	尺度族	$\bar{X}/\sigma$
$\sigma^{-1}f((x - \mu)/\sigma)$	位置-尺度族	$(\bar{X} - \mu)/S$

我們又有如下的定理。

定理2.1 設 $X_1, \dots, X_n$, 為一組由位置-尺度族分佈所產生之隨機樣本。即設共同的 p.d.f. 有如下型式:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

設 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ 分別為 μ , σ 之MLE, 則 $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ 及 $\hat{\sigma}/\sigma$ 分別為 μ 及 σ 之樞紐量。

上述定理之證明可參考Antle and Bain(1969)。

舉一例子來看。設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本。則 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 為 λ 之一充分統計量, 且 T 有 $\Gamma(n, 1/\lambda)$ 分佈。即 T 之p.d.f.為

$$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)}, t > 0。$$

故 T 屬於尺度族, λT 為一樞紐量, 其分佈與 λ 無關。又 $2\lambda T$ 當然亦為一樞紐量, 有 $\Gamma(n, 2) = \chi_{2n}^2$ 分佈。

在同一信賴係數下, 信賴區間往往不唯一。顯然我們較有興趣的, 乃是在某一特定類之信賴區間中, 長度最短者。

在例2.1中, 於 σ^2 已知之下, 給定 $-0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 可看出

$$(2.5) \quad \left[\bar{X} - z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

亦為 μ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間, 其長度為 $(z_{1-\alpha_1} + z_{1-\alpha_2})\sigma/\sqrt{n}$ 。對所有型如(2.5)式之 $1 - \alpha$ 信賴區間, 長度要最短, 等價於 $z_{1-\alpha_1} + z_{1-\alpha_2}$ 要最小。可證明當 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 時, 此值最小(習題第4題)。因此(2.2)式所給之區間, 是所有型如(2.5)式之 μ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間中最短者。

又在例2.1中, 於 σ^2 未知之下, 給定 $-0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 亦可看出

$$(2.6) \quad \left[\bar{X} - t_{1-\alpha_2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha_1, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

為 μ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間, 其長度為 $(t_{1-\alpha_1, n-1} + t_{1-\alpha_2, n-1})S/\sqrt{n}$ 。對所有型如(2.6)式之 μ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間, 亦可證明於 S 給定之下, (2.4)式所給之區間為長度最短者(習題第5題)。

例2.2 常態分佈變異數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。欲給 σ^2 之信賴區間。先設 μ 已知。由第六章例3.6及第七章例3.4, 得

$$(2.7) \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

為 σ^2 之MLE及UMVUE。又由第四章定理3.2, $n\tilde{\sigma}^2/\sigma^2$ 有 χ_n^2 分佈, 其分佈與 σ^2 無關, 故可用來當做樞紐量。令 $\chi_{p,m}^2$ 為 χ_m^2 分佈之第 p 分位數, $0 < p < 1$, $m \geq 1$ 。則給定 $0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$,

$$(2.8) \quad P_{\sigma^2}(\chi_{\alpha_2, n}^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\alpha_1, n}^2) = 1 - \alpha。$$

故

$$(2.9) \quad \left[\frac{n\tilde{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha_1, n}^2}, \frac{n\tilde{\sigma}^2}{\chi_{\alpha_2, n}^2} \right]$$

為 σ^2 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。此區間之長度及期望長度分別為

$$n\tilde{\sigma}^2 \left(\frac{1}{\chi_{\alpha_2, n}^2} - \frac{1}{\chi_{1-\alpha_1, n}^2} \right), \quad n\sigma^2 \left(\frac{1}{\chi_{\alpha_2, n}^2} - \frac{1}{\chi_{1-\alpha_1, n}^2} \right)。$$

實際應用時, 通常取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 。不過這樣取, 並不會使信賴區間的長度為最短。是的確存在唯一的 α_1, α_2 , 使得(2.9)式中之區間成為最短(見Roussas(1997)p.400)。不過可以證明, 當 n 較大時, 若取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, 則區間之長度, 與最短者差異便不大(見Tate and Klett(1959))。

例如, 設 $n = 25$, $\alpha = 0.05$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.025$, 則 $\chi_{0.975, 25}^2 = 40.65$, $\chi_{0.025, 25}^2 = 13.12$, 故 σ^2 之一95%信賴區間為(以 $\tilde{\sigma}^2$ 來表示)

$$\left[\frac{25\tilde{\sigma}^2}{40.65}, \frac{25\tilde{\sigma}^2}{13.12} \right],$$

其中 $\tilde{\sigma}^2$ 如(2.7)式所給。又由Roussas(1997)p.401知, 最短區間約為

$$\left[\frac{25\tilde{\sigma}^2}{45.7051}, \frac{25\tilde{\sigma}^2}{14.2636} \right],$$

二區間長度之比值約為1.07, 算是很接近1。

至於 μ 未知的情況，顯然可採用 $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 當做樞紐量，而得(習題第6題)給定 $-0 < \alpha < 1$ ，對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ，

$$(2.10) \quad \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha_1, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_2, n-1}^2} \right]$$

為 σ^2 之一 $1-\alpha$ 信賴區間。實際應用時，也常將 α_1, α_2 皆取為 $\alpha/2$ 。

例如，設 $n = 16$ ， $S^2 = 4.84$ ， $\alpha = 0.01$ 。又取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2 = 0.005$ 。則 $\chi_{0.995, 15}^2 = 32.80$ ， $\chi_{0.005, 15}^2 = 4.60$ 。則得 σ^2 之一99%信賴區間為

$$\left[\frac{15 \cdot 4.84}{32.80}, \frac{15 \cdot 4.84}{4.60} \right] \doteq [2.21, 15.78]。$$

底下給幾個非常態分佈的例子。

例2.3 Gamma分佈尺度參數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\Gamma(\gamma, \beta)$ 分佈所產生之隨機樣本，其中設 γ 為一已知正整數。即此組樣本之共同p.d.f.為

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\gamma)\beta^\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-x/\beta}, x > 0,$$

故為尺度族分佈。由表2.1， $\bar{X}/\beta$ 為一樞紐量。 $\bar{X}$ 也是 β 的充分統計量。事實上 $T = 2n\bar{X}/\beta = 2 \sum_{i=1}^n X_i/\beta$ 有 $\chi_{2\gamma n}^2$ 分佈(亦見第二章例3.2):

$$\begin{aligned} E(e^{-sT}) &= E(e^{-s \cdot 2 \sum_{i=1}^n X_i/\beta}) = (E(e^{-(2s/\beta)X}))^n \\ &= \left(\frac{1}{(1 + \beta(2s/\beta))^\gamma} \right)^n = \frac{1}{(1 + 2s)^\gamma}, s \geq 0, \end{aligned}$$

而此對應 $\chi_{2\gamma n}^2$ 分佈之拉普拉斯轉換。

給定 $-0 < \alpha < 1$ ，對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ，

$$(2.11) \quad P_\beta(\chi_{\alpha_2, 2\gamma n}^2 \leq \frac{2n\bar{X}}{\beta} \leq \chi_{1-\alpha_1, 2\gamma n}^2) = 1 - \alpha。$$

故

$$(2.12) \quad \left[\frac{2n\bar{X}}{\chi_{1-\alpha_1, 2\gamma n}^2}, \frac{2n\bar{X}}{\chi_{\alpha_2, 2\gamma n}^2} \right]$$

為 β 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。此區間長度及期望長度分別為

$$2n\bar{X}\left(\frac{1}{\chi_{\alpha_2, 2\gamma n}^2} - \frac{1}{\chi_{1-\alpha_1, 2\gamma n}^2}\right), \quad 2n\gamma\beta\left(\frac{1}{\chi_{\alpha_2, 2\gamma n}^2} - \frac{1}{\chi_{1-\alpha_1, 2\gamma n}^2}\right)。$$

通常仍取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ ，雖仍如上例中所述，這樣取並不會使信賴區間之長度最短。

例如，設 $n = 7$ ， $\gamma = 2$ ， $\bar{X} = 5.1$ ， $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2 = 0.025$ 。則 $\chi_{0.025, 28}^2 \doteq 15.31$ ， $\chi_{0.975, 28}^2 \doteq 44.46$ 。故得 β 之一95%信賴區間為

$$\left[\frac{2 \cdot 7 \cdot 5.1}{44.46}, \frac{2 \cdot 7 \cdot 5.1}{15.31}\right] \doteq [1.61, 4.66]。$$

例2.4 Beta分佈參數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{B}e(\theta, 1)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\theta > 0$ 。由5.2節習題第12題知， $\prod_{i=1}^n X_i$ ，或等價地， $\sum_{i=1}^n \log X_i$ 為 θ 之一充分統計量。令 $Y_i = -2\theta \log X_i$ ， $i = 1, \dots, n$ 。利用變數代換得 Y_i 之p.d.f.為(習題第7題)

$$g(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}, y > 0。$$

即 Y_i 有 $\mathcal{E}(1/2) = \chi_2^2$ 分佈。因此

$$T = \sum_{i=1}^n Y_i = -2\theta \sum_{i=1}^n \log X_i$$

有 χ_{2n}^2 分佈。即得 T 為一樞紐量。

給定 $0 < \alpha < 1$ ，則對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ，

$$(2.13) \quad P_\theta(\chi_{\alpha_2, 2n}^2 \leq -2\theta \sum_{i=1}^n \log X_i \leq \chi_{1-\alpha_1, 2n}^2) = 1 - \alpha。$$

故

$$(2.14) \quad \left[-\frac{\chi_{\alpha_2, 2n}^2}{2 \sum_{i=1}^n \log X_i}, -\frac{\chi_{1-\alpha_1, 2n}^2}{2 \sum_{i=1}^n \log X_i} \right]$$

為 θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。通常仍取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ ，但再度此區間長度並非最短。

例如, 設 $n = 25$, $\sum_{i=1}^{25} \log X_i = -49.32$, $\alpha = 0.05$ 。則 $\chi_{0.025, 50}^2 \doteq 32.36$, $\chi_{0.975, 50}^2 \doteq 71.42$ 。故得 θ 之一 95% 信賴區間為

$$\left[-\frac{32.36}{2(-49.32)}, -\frac{71.42}{2(-49.32)} \right] = [0.33, 0.72],$$

對 $Be(1, \theta)$ 分佈, 亦可類似地找到 θ 之信賴區間(習題第 10 題)。但對一般的 $Be(p, q)$ 分佈, 即使 q (或 p) 已知, 並不易找到 p (或 q) 之信賴區間。

例 2.5 均勻分佈參數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{U}[0, \theta]$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。令 $T = X_{(n)}/\theta$, 則如例 1.5, T 之 p.d.f. 為

$$f_T(t) = nt^{n-1}, 0 \leq t \leq 1。$$

即得 T 為一樞紐量。

給定 $0 < \alpha < 1$, 對任意 $0 < a < b \leq 1$, 滿足

$$(2.15) \quad P_\theta(a \leq T \leq b) = \int_a^b nt^{n-1} dt = b^n - a^n = 1 - \alpha,$$

便得

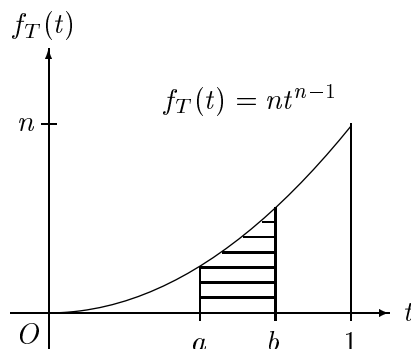
$$(2.16) \quad \left[\frac{X_{(n)}}{b}, \frac{X_{(n)}}{a} \right]$$

為 θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。此區間之長度及期望長度分別為

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)X_{(n)}, \quad \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{n}{n+1}\theta。$$

可以利用微分求出使 $(1/a - 1/b)$ 最小的 a, b 之值。或檢視 $f_T(t)$ 之圖形, 介於 a, b 間之面積為 $1 - \alpha$, 且 $(1/a - 1/b)$ 要最小。則使 b 最大 ($= 1$) 顯然為解。此時 $a = \alpha^{1/n}$, 且信賴區間成為

$$(2.17) \quad \left[X_{(n)}, \alpha^{-1/n} X_{(n)} \right]。$$



例如, 設 $n = 32$, $X_{(n)} = 3.2$, $\alpha = 0.05$, 則 $(\alpha)^{-1/n} = (0.05)^{-1/32} \doteq 1.098$ 。故得 θ 之一 95% 信賴區間為 $[3.2, 3.51]$ 。

一般而言, 若 $[L, U]$ 為 θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間, 且 $\tau(\theta)$ 為 θ 之一嚴格單調漸增函數, 則 $[\tau(L), \tau(U)]$ 為 $\tau(\theta)$ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。

例2.6 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{W}(p, q)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta = (p, q)$, $p, q > 0$ 。韋伯分佈並非位置-尺度族, 其 p.d.f 為

$$f(x|\theta) = pqx^{q-1}e^{-px^q}, x > 0。$$

令 $Y = \log X$, 則 Y 之 p.d.f 為

$$f_Y(y) = pqe^{qy-pe^{qy}}, y \in R。$$

再令

$$(2.18) \quad \mu = -\frac{\log p}{q}, \quad \sigma = \frac{1}{q},$$

即

$$(2.19) \quad p = e^{-u/\sigma}, \quad q = \frac{1}{\sigma},$$

且 $\theta_1 = (\mu, \sigma)$ 。則得

$$f_Y(y|\theta_1) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{y-\mu}{\sigma} - e^{(y-\mu)/\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), y \in R,$$

其中

$$f(z) = e^{z-e^z}, z \in R。$$

即得 Y 有位置-尺度參數。因此由定理 2.1,

$$Q_1 = \hat{q}\left(-\frac{\log \hat{p}}{\hat{q}} + \frac{\log p}{q}\right) = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}},$$

$$Q_2 = \frac{q}{\hat{q}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma},$$

分別為 p 及 q 之樞紐量, 其中 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 分別為 μ 及 σ 之 MLE, 將 $\hat{\mu}$ 及 $\hat{\sigma}$ 代入 (2.19) 式便得估計量 $\hat{p}$ 及 $\hat{q}$ 。

由第六章例3.16知,只能以數值的方法解出 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ 及 $\hat{p}$, $\hat{q}$, 故無法給出 Q_1 及 Q_2 之明確的分佈。因此仍只能以數值的方法近似地求出此二分佈。細節在此略過。

上例顯示, 樞紐量的分佈有時無法明確地給出。又雖然不見得每次都能找到基於MLE(或其他合理的統計量)之樞紐量, 但對只有一未知參數之連續型的分佈, 利用其分佈函數, 必可找到一樞紐量。作法如下。

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由連續型分佈函數 $F(x|\theta)$ 所產生之隨機樣本。由第一章定理5.5, $F(X_i|\theta) \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$ 。令 $Y_i = -\log F(X_i|\theta)$, 則利用變數代換, 得 $Y_i \sim \mathcal{E}(1)$ 。故有

$$(2.20) \quad -2 \sum_{i=1}^n \log F(X_i|\theta) \sim \chi_{2n}^2。$$

給定 $-0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$,

$$(2.21) \quad P_{\theta}(\chi_{\alpha_2, 2n}^2 \leq -2 \sum_{i=1}^n \log F(X_i|\theta) \leq \chi_{1-\alpha_1, 2n}^2) = 1 - \alpha。$$

如同以往, 通常取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, 而得

$$(2.22) \quad P_{\theta}(\chi_{\alpha/2, 2n}^2 \leq -2 \sum_{i=1}^n \log F(X_i|\theta) \leq \chi_{1-\alpha/2, 2n}^2) = 1 - \alpha。$$

若能由 $\chi_{\alpha/2, 2n}^2 \leq -2 \sum_{i=1}^n \log F(X_i|\theta) \leq \chi_{1-\alpha/2, 2n}^2$ 解出一關於 θ 的隨機集合, 便得 $-\theta$ 之 $1 - \alpha$ 信賴集合(不一定是一區間)。但若分佈函數 F 並無明確的型式(如常態分佈的情況), 或前述不等式太複雜, 則便只能以數值的方法解出。若 $F(x|\theta)$ 為 θ 之一單調漸增(或漸減)函數, 則信賴集合便成為信賴區間。另外, 由於 $1 - F(X_i|\theta)$ 亦有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈, 故亦有

$$(2.23) \quad -2 \sum_{i=1}^n \log(1 - F(X_i|\theta)) \sim \chi_{2n}^2。$$

一般而言, 利用(2.20)或(2.23)式, 會得到不同的區間, 視何者計算較簡易, 而決定採用(2.20)或(2.23)式。

例2.7 柏拉圖分佈參數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{P}a(1, q)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其共同的 p.d.f., 及分佈函數為

$$f(x) = qx^{-q-1}, x > 1,$$

$$F(x) = 1 - x^{-q}, x > 1。$$

利用(2.23)式, 因 $-\log(1 - F(x|\theta)) = q \log x, x > 1$, 故得

$$-2 \sum_{i=1}^n \log(1 - F(X_i|\theta)) = 2q \sum_{i=1}^n \log X_i \sim \chi_{2n}^2。$$

而由

$$\chi_{\alpha/2, 2n}^2 \leq 2q \sum_{i=1}^n \log X_i \leq \chi_{1-\alpha/2, 2n}^2,$$

解出

$$(2.24) \quad \left[\frac{\chi_{\alpha/2, 2n}^2}{2 \sum_{i=1}^n \log X_i}, \frac{\chi_{1-\alpha/2, 2n}^2}{2 \sum_{i=1}^n \log X_i} \right],$$

為 q 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。

讀者可以自行嘗試, 若利用(2.20)式, 將只能以數值的方法求出信賴區間。

信賴區間與假設檢定有對偶的關係。我們以下例來說明。

例2.8 常態分佈期望值之雙邊檢定

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其中 σ^2 設為已知。欲檢定

$$H_0: \mu = \mu_0, \text{ vs. } H_a: \mu \neq \mu_0。$$

則由第八章(2.6)式知, 在型 I 錯誤機率為 α 之下, H_0 之接受域為

$$(2.25) \quad \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]。$$

此拒絕域恰與(2.2)式所給之 σ^2 已知之下, μ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間相同。

這並非偶然的現象。雙邊檢定(不限期望值)與信賴區間就是有此對偶關係。二者可說是一體的二面。

9.3 較一般的方法

對離散型分佈，以及一些多參數的分佈，樞紐統計量可能不存在。此時利用極限的結果，往往可找到近似的樞紐量。這使得樞紐量的方法用途更加廣泛。

例3.1 伯努力分佈成功機率之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\text{Ber}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本。則 $\bar{X}$ 為 θ 之 MLE 及 UMVUE。並不存在一基於 $\bar{X}$ 及 θ 之樞紐量。但由中央極限定理(見第四章例2.10),

$$(3.1) \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

因此 n 夠大時,

$$P_{\theta} \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right) \doteq 1 - \alpha。$$

又

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \\ \Leftrightarrow (n + z_{1-\alpha/2}^2)\theta^2 - (2n\bar{X} + z_{1-\alpha/2}^2)\theta + n\bar{X}^2 \leq 0。 \end{aligned}$$

故得 θ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間為

$$(3.2) \quad [L(\bar{X}), U(\bar{X})],$$

其中

$$\begin{aligned} L(\bar{X}) &= \frac{2n\bar{X} + z_{1-\alpha/2}^2 - z_{1-\alpha/2}(4n\bar{X}(1 - \bar{X}) + z_{1-\alpha/2}^2)^{1/2}}{2(n + z_{1-\alpha/2}^2)}, \\ U(\bar{X}) &= \frac{2n\bar{X} + z_{1-\alpha/2}^2 + z_{1-\alpha/2}(4n\bar{X}(1 - \bar{X}) + z_{1-\alpha/2}^2)^{1/2}}{2(n + z_{1-\alpha/2}^2)}。 \end{aligned}$$

對 $\forall n \geq 1, 0 \leq \bar{X} \leq 1, 0 < \alpha < 1$, $L(\bar{X})$ 及 $U(\bar{X})$ 為 θ 之二次方程式

$$(3.3) \quad (n + z_{1-\alpha/2}^2)\theta^2 - (2n\bar{X} + z_{1-\alpha/2}^2)\theta + n\bar{X}^2 = 0$$

的二根。可證明 $0 \leq L(\bar{X}) < U(\bar{X}) \leq 1$ (習題第1題)。故 $[L(\bar{X}), U(\bar{X})]$ 為 θ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。

實際應用時, 只要 $n\theta$ 及 $n(1 - \theta)$ 皆大於 5, (3.2) 式便給出一令人滿意的 θ 之近似的信賴區間。你可能會問, θ 不是未知嗎? 那如何確定 $n\theta$ 及 $n(1 - \theta)$ 是否大於 5? 有時我們會對 θ 有一些了解, 例如, 知道 $0.2 < \theta \leq 0.9$, 因此 $n \geq 51$ 便可以了。但若 n 並非夠大, 則前述近似的方法便不適用, 此時可參考 Bickel and Doksum (1977) pp. 180-182 Example 5.3.2 的作法。

另外, 由弱大數法則,

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta,$$

再由第四章定理 2.3, 得

$$(3.4) \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

由此即得一以 $\bar{X}$ 為中心之較簡潔的信賴區間:

$$(3.5) \quad \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \right],$$

或寫成 $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})/n}$, 為 θ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間, 計算上容易許多。當然因為是近似, 所以仍可有其他形式的近似信賴區間。

例如, 設 $\bar{X} = 0.29$, $\alpha = 0.05$, $n = 40$, 利用 (3.2) 及 (3.5) 式, 因 $z_{0.975} = 1.96$, 分別得到 θ 之近似的 0.95 信賴區間為

$$(3.6) \quad 0.3084 \pm 0.1356, \quad \text{及} \quad 0.29 \pm 0.141$$

即分別約為

$$[0.173, 0.444], \quad [0.149, 0.431]。$$

是有些差異, 如果 n 夠大, 差異將減小。例如, 設 n 改為400, 其餘不變, 則依(3.2)式及(3.5)式, 分別得到 θ 之近似的0.95信賴區間為

$$(3.7) \quad 0.2920 \pm 0.0443, \quad \text{及} \quad 0.29 \pm 0.044,$$

即分別約為

$$[0.2477, 0.3363], \quad \text{及} \quad [0.246, 0.334],$$

二者差異便不算太大了。

對於本例, 我們亦可決定樣本數 n , 以達到所需之精確度。在有關對某候選人之支持度, 對行政院某部會之施政滿意度, 或對某產品之喜愛度的調查, 常會產生伯努力分佈。此時對所欲估計的 θ (表支持度、滿意度、或喜愛度等), 可能會得到如(3.2)或(3.5)式之 θ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間。我們當然希望此區間短些, 如此估計才夠精準。

設採用(3.5)式當做 θ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間, 且希望此區間的半徑 $\leq d$ (表估計之誤差不超過 d)。即要有

$$(3.8) \quad z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n} \leq d。$$

因 $0 \leq \bar{X} \leq 1$, 故 $\bar{X}(1-\bar{X}) \leq 1/4$, 因此使(3.8)式成立之一充分條件為

$$\frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4n} \leq d^2。$$

即

$$(3.9) \quad n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4d^2}。$$

若取 $\alpha = 0.05$, $d = 0.03$, 即得

$$n \geq \frac{z_{0.975}^2}{4 \cdot 0.03^2} = \frac{1.96^2}{0.0036} = 1,067.1。$$

即需有 $n \geq 1,068$ 。一般在做民調時, 若在百分之九十五信心水準下, 抽樣誤差要在正負三個百分點以內, 則樣本數至少要有1,068, 就是這樣算

出來的。實際在調查時，由於會有拒訪等失敗的樣本，所以一開始設定的樣本數要多些。但最後成功的樣本數當然也不一定剛好是1,068。假設最後成功的樣本數為 n ，則由

$$z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n} \leq z_{1-\alpha/2}/(2\sqrt{n}),$$

得抽樣誤差

$$d \leq \frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}。$$

例如，設 $\alpha = 0.05$ ， $n = 900$ ，則得 $d \leq 1.96/60 \doteq 0.0327$ 。此時可以說在百分之九十五信心水準下，抽樣誤差在正負3.27個百分點以內。

由(3.9)式可看出，若抽樣誤差要減小，則樣本數將快速增加。例如，在 $\alpha = 0.05$ 下，若要 $d = 0.01$ ，則

$$n \geq \frac{z_{0.975}^2}{4 \cdot 0.01^2} \doteq \frac{1.96^2}{0.0004} = 9,604。$$

所需之樣本數為 $d = 0.03$ 時之9倍。顯然抽樣誤差要降為 $1/k$ 倍，所需之樣本數要成為 k^2 倍。反之，若樣本數增為 k 倍，則抽樣誤差僅降為 $1/\sqrt{k}$ 倍。若要提高信心水準呢？例如，設 α 由0.05降為0.01， d 仍設為0.03，則 $z_{0.995} \doteq 2.576$ ，則所需之樣本數至少要有

$$\frac{2.576^2}{4 \cdot 0.03^2} \doteq 1,843.3,$$

即至少要有樣本數1,844。

另外，採(3.2)式的近似信賴區間所得需要之樣本數，與採(3.9)式所得需要之樣本數，差異並不大。仍利用 $\bar{X}(1-\bar{X}) \leq 1/4$ 。由(3.2)式得，若下式成立，則誤差 $\leq d$ ：

$$(3.10) \quad \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4(n + z_{1-\alpha/2}^2)} \leq d^2,$$

即

$$(3.11) \quad n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4d^2} - z_{1-\alpha/2}^2。$$

由於通常 $z_{1-\alpha/2}^2$ 並不太大，因此與利用(3.9)式所得之 n 差異不大。

最後必須一提的是，我們將 $\overline{X}(1-\overline{X})$ 以 $1/4$ 取代，這樣其實有些粗糙(只要看 $\overline{X} = 0.1$ 的情況即知)，造成的誤差遠比(3.2)式與(3.5)式間的差異大多了。只有當 θ 較接近 $1/2$ 時，這種取代才不致有太離譜的影響。如果事先知道 θ 的範圍，如 $0.3 \leq \theta \leq 0.7$ ，當然可對 $\overline{X}(1-\overline{X})$ 得到比 $1/4$ 更精確的推估。

上例顯示，在勢均力敵的情況下，民調領先，選舉結果卻逆轉是很平常的。例如，設候選人甲的支持度為32.3%，候選人乙的支持度為31.2%。由於大部分的民調是設定 $\alpha = 0.05$ ， $d = 0.03$ ，在此情況下，候選人甲支持率的95%信賴區間為 $[29.3\%, 35.3\%]$ ，候選人乙支持率的95%信賴區間為 $[28.2\%, 34.2\%]$ 。二區間有很大的重疊，因此逆轉發生並不足為奇。再加上民調多半採用電話訪問，先天已有一些不易掌控的因素。當然不要忘記這些信賴區間也只是“近似的”。

例3.2 波松分佈參數之信賴區間

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{P}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本，則由第四章例2.8,

$$(3.12) \quad \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

又由弱大數法則，

$$\overline{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta。$$

因此第四章定理2.3導致

$$(3.13) \quad \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\overline{X}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

利用(3.12)或(3.13)式皆可得到 θ 之一近似的信賴區間。例如，由(3.13)式得 n 夠大時，

$$P_{\theta} \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\overline{X}}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right) \doteq 1 - \alpha,$$

即

$$(3.14) \quad \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} \right],$$

或寫成 $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n}$, 為 θ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。

例如, 設 $\bar{X} = 4.2$, $\alpha = 0.01$, $n = 60$ 。因 $z_{0.995} = 2.576$, 利用(3.14)式, 得 θ 之一近似的 99% 信賴區間為 $4.3 \pm 2.576 \sqrt{4.3/60}$, 即 4.3 ± 0.6896 , 或 $[3.610, 4.990]$ 。

若不存在參數 θ 之樞紐量, 有時仍可找到 θ 的信賴區間, 我們給一例子如下。更詳盡的討論, 可參考 Bain and Engelhardt(1992)pp.369-377。

例3.3 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 p.d.f.

$$f(x|\theta) = \theta^{-2} e^{-(x-\theta)^2/\theta^2}, x \geq \theta,$$

所產生之隨機樣本, 其中 $\theta > 0$ 。則 $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$ 為 θ 之一最小充分統計量。我們擬找一基於 $X_{(1)}$ 之 θ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間。

首先 $X_{(1)}$ 之分佈函數為

$$(3.15) \quad G(u|\theta) = 1 - e^{-n(u-\theta)/\theta^2}, u \geq \theta。$$

假設能找到兩個 θ 的函數 $h_1(\theta)$ 及 $h_2(\theta)$, 滿足

$$P(h_1(\theta) \leq X_{(1)} \leq h_2(\theta)) = 1 - \alpha。$$

再由 $h_1(\theta) \leq X_{(1)} \leq h_2(\theta)$, 解出 θ 的隨機區間, 則此區間便為 θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間。這樣的 $h_1(\theta)$ 及 $h_2(\theta)$ 通常並不唯一。對任二 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 則 $h_1(\theta)$ 及 $h_2(\theta)$ 若分別滿足

$$G(h_1(\theta)|\theta) = \alpha_1, \quad G(h_2(\theta)|\theta) = 1 - \alpha_2,$$

便為所求。一般可取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 。

例如, 設 $\alpha = 0.1$ 。則

$$G(h_1(\theta)|\theta) = 0.05, \quad G(h_2(\theta)|\theta) = 0.95,$$

由上二式解出

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \theta - \frac{\theta^2}{n} \log 0.95 \doteq \theta + 0.0513\theta^2/n, \\ h_2(\theta) &= \theta - \frac{\theta^2}{n} \log 0.05 \doteq \theta + 2.996\theta^2/n. \end{aligned}$$

$\theta + 0.0513\theta^2/n \leq X_{(1)} \leq \theta + 2.996\theta^2/n$ 之機率約為0.90。由此即可解出 $-\theta$ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間。例如, 設 $X_{(1)} = 2.5$, $n = 10$, 解 $\theta + 2.996\theta^2/10 = 2.5$ 及 $\theta + 0.0513\theta^2/10 = 2.5$, 分別得(注意 $\theta > 0$) $\theta \doteq 1.667$ 及 2.469 。故 θ 之90%信賴區間約為 $[1.667, 2.469]$ 。

我們再來看多維參數的信賴區間。

設有參數 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$ 。下述 r 維的隨機矩形

$$[L_1(\mathbf{X}), U_1(\mathbf{X})] \times \cdots \times [L_r(\mathbf{X}), U_r(\mathbf{X})],$$

若滿足

$$p = \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} P_{\boldsymbol{\theta}}(\theta_i \in [L_i(\mathbf{X}), U_i(\mathbf{X})], i = 1, \dots, r),$$

便稱此為 $\boldsymbol{\theta}$ 的一信賴係數為 p 之信賴區域。

若 $[L_i(\mathbf{X}), U_i(\mathbf{X})]$ 為 θ_i 之 $1 - \alpha$ 信賴區間, 其中 $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, r$, 且 $[L_1(\mathbf{X}), U_1(\mathbf{X})], \dots, [L_r(\mathbf{X}), U_r(\mathbf{X})]$ 相互獨立。則 $[L_1(\mathbf{X}), U_1(\mathbf{X})] \times \cdots \times [L_r(\mathbf{X}), U_r(\mathbf{X})]$ 為 $\boldsymbol{\theta}$ 之

$$\prod_{i=1}^r (1 - \alpha_i)$$

信賴區域。若 $[L_1(\mathbf{X}), U_1(\mathbf{X})], \dots, [L_r(\mathbf{X}), U_r(\mathbf{X})]$ 不相互獨立, 由 n 個事件之邦弗朗尼不等式(見習題第11題),

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(\theta_i \in [L_i(\mathbf{X}), U_i(\mathbf{X})], i = 1, \dots, r)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=1}^n P_{\theta}(\theta_i \in [L_i(\mathbf{X}), U_i(\mathbf{X})]) - (r-1) \\
&\geq \sum_{i=1}^r (1 - \alpha_i) - (r-1) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i.
\end{aligned}$$

故我們知道此時信賴係數至少是 $1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i$ 。由於 $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, r$, 故

$$\prod_{i=1}^r (1 - \alpha_i) > 1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i.$$

當然 $\sum_{i=1}^r \alpha_i$ 要小於 1 上述不等式才有用。給 $0 < \alpha < 1$, 若取 $\alpha_i = \alpha/r$, 則此時信賴係數至少是 $1 - \alpha$, 不論 $[L_1(\mathbf{X}), U_1(\mathbf{X})], \dots, [L_r(\mathbf{X}), U_r(\mathbf{X})]$ 是否相互獨立。

例3.4 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機變數, 其中 $\mu \in R$, $\sigma > 0$ 。欲得 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 之信賴區域。由例2.1及2.2知,

$$I_1(\mathbf{X}) = \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/4, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/4, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

及

$$I_2(\mathbf{X}) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/4, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/4, n}^2} \right],$$

分別為 μ 及 σ^2 之信賴係數為 $1 - \alpha/2$ 信賴區間。再由邦弗朗尼不等式知

$$I_1(\mathbf{X}) \times I_2(\mathbf{X})$$

為 (μ, σ^2) 之信賴係數至少是 $1 - \alpha$ 的信賴區域。

信賴區域有時不一定是矩形, 見下例。

例3.5 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。其中 $\mu \in R, \sigma > 0$ 。欲得 $-\theta = (\mu, \sigma^2)$ 之信賴區域。考慮隨機變數

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{及} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}。$$

由第四章定理3.1, 上述二隨機變數獨立, 且分別有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 及 χ_{n-1}^2 分佈。

現對 $\forall 0 < \alpha < 1$, 令 $c = z_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}$, $a = \chi_{\alpha_2, n-1}^2$, $b = \chi_{1-\alpha_1, n-1}^2$, 其中 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ 。則

$$\begin{aligned} P_{\theta}(-c \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < c, a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b) \\ = P_{\theta}(-c \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < c) P_{\theta}(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b) \\ = \sqrt{1-\alpha} \cdot \sqrt{1-\alpha} = 1 - \alpha。 \end{aligned}$$

由

$$P_{\theta}((\mu - \bar{X})^2 \leq \frac{c^2 \sigma^2}{n}, \frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}) = 1 - \alpha。$$

即給出 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 之 $1 - \alpha$ 信賴區域。我們繪出信賴區域於圖3.1。

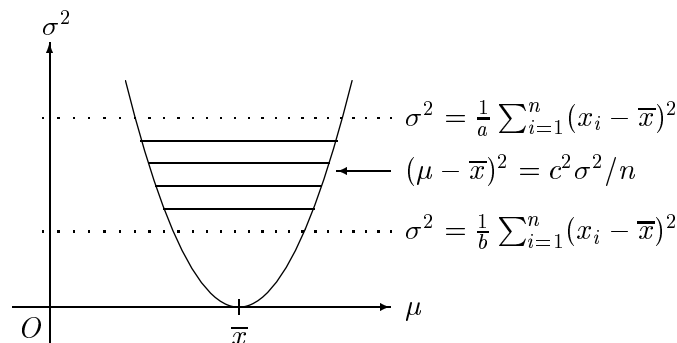


圖3.1 例3.5中之 $1 - \alpha$ 信賴區間

至此我們所遇到的都是已知分佈的情況, 有時分佈無法得知, 但卻想對其中某一參數(譬如說母體的期望值), 給出信賴區間。此時在適當的條件下, 仍可藉助中央極限定理以求出信賴區間。

設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組隨機樣本, 假設期望值 μ 及變異數 σ^2 皆存在。則由中央極限定理,

$$(3.16) \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

若 σ^2 已知, 則由(3.16)式, 可得 μ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。若 σ^2 未知, 則因樣本變異數

$$(3.17) \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma^2$$

(第七章例5.3), 結合(3.16)及(3.17)二式, 得

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

由此仍可得

$$(3.18) \quad \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

為 μ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。例3.1及例3.2皆為本方法之特例。

最後我們來看貝氏區間估計。

在第六章點估計的討論裡, 我們曾介紹貝氏估計(第6.4節)。也就是將參數亦視為一隨機變數。當參數為一隨機變數時, 於求出參數之事後分佈後, 其貝氏信賴區間(Bayesian confidence interval)之求法, 便可以前面的方式得到了。

設 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 之p.d.f.為 $f(\mathbf{x}|\theta)$, 而 θ 之事前p.d.f.為 $\pi(\theta)$, 則在給定 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ 之下, θ 之事後p.d.f.為

$$(3.19) \quad f_{\theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}。$$

例3.6 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{P}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, 又設 θ 之事前分佈為 $\Gamma(r, \beta)$ 。則給定 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, θ 之事後分佈為 $\Gamma(\sum_{i=1}^n x_i + r, (n+1/\beta)^{-1})$ (見第六章例4.5)。若以 $\theta_{\mathbf{x}}$ 表 $\theta|\mathbf{x}$, 則

$$\frac{2\theta_{\mathbf{x}}}{(n+1/\beta)^{-1}} = 2(n+1/\beta)\theta_{\mathbf{x}} \sim \chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i + r)},$$

且

$$(3.20) \quad P_{\theta}(\chi_{\alpha/2, v}^2 \leq 2(n + \frac{1}{\beta})\theta_x \leq \chi_{1-\alpha/2, v}^2) = 1 - \alpha,$$

其中 $v = 2(\sum_{i=1}^n x_i + r)$ 。即得 θ 之 $1 - \alpha$ 貝氏信賴區間為

$$(3.21) \quad \left[\frac{\chi_{\alpha/2, v}^2}{2(n + 1/\beta)}, \frac{\chi_{1-\alpha/2, v}^2}{2(n + 1/\beta)} \right]。$$

9.4 二母體的問題

有時我們會對兩個母體做比較，如比較二母體之期望值或變異數，並因此得到信賴區間。

先考慮**兩組獨立常態分佈的情況**。

設 $X_1, \dots, X_{n_1}$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 分佈所產生之隨機樣本， $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。又以 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分別表二組樣本之樣本平均及樣本變異數。二組樣本假設相互獨立。

假設我們想知道其中一母體之變異數是否較另一母體之變異數小。例如，有兩種生產螺絲的方法，我們想決定那一方法所生產螺絲直徑的變異較小。求出二母體變異數之不偏估計量 S_1^2 及 S_2^2 後，若二者之值差異不太大，就不是很清楚究竟是變異數真的有差異，還是因隨機取樣所產生的誤差。當然如果樣本數很大，則二估計值間的一點點差異，可能就顯示二參數值有差異。但若樣本數不是很大，則較大的差異可能只是由於機會的關係。因此不能只由二估計值絕對差之大小，而判定二參數是否真的不相等，藉助信賴區間可能是一較客觀的方法。

我們先來看**二變異數比值的信賴區間**。

由第四章例3.4,

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}。$$

故 $S_1^2\sigma_2^2/(S_2^2\sigma_1^2)$ 可當做 σ_2^2/σ_1^2 的樞紐量。對 $\forall 0 < \alpha < 1$ 及任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 由

$$(4.1) \quad P(f_{\alpha_2, n_1-1, n_2-1} \leq \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \leq f_{1-\alpha_1, n_1-1, n_2-1}) = 1 - \alpha,$$

知

$$(4.2) \quad \left[\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{\alpha_2, n_1-1, n_2-1}, \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{1-\alpha_1, n_1-1, n_2-1} \right]$$

為 σ_2^2/σ_1^2 之 $1 - \alpha$ 信賴區間。實際應用時，通常取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 。又此處對任一 $0 < p < 1$ ， f_{p, n_1-1, n_2-1} 表 $\mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}$ 分佈之第 p 分位數。此信賴區間與 8.3.2 節檢定 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, vs. $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，所得之接受域，亦有對偶的關係。

例 4.1 設 $n_1 = 16$, $n_2 = 21$, $S_1^2 = 0.60$, $S_2^2 = 0.20$, $\alpha = 0.10$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$ 。則 $f_{0.95, 15, 20} \doteq 2.20$, $f_{0.05, 15, 20} = 1/f_{0.95, 20, 15} \doteq 1/2.33 \doteq 0.429$ 。故得

$$\left[\frac{0.20}{0.60} \cdot 0.429, \frac{0.20}{0.60} \cdot 2.20 \right] \doteq [0.143, 0.733]$$

為 σ_2^2/σ_1^2 之 90% 信賴區間。由於此區間不包含 1，所以若是檢定 $H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2$, vs. $H_a: \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$ ，我們推論 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 \neq 1$ ，或說 $\sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$ ，亦即認為此二母體不具相同之變異數。由於信賴係數為 90%，所以平均來說，約有 10% 的這種推論會不正確，即型 I 錯誤之機率為 0.10。

其次我們來看二期望值之差的信賴區間。

先設 σ_1^2, σ_2^2 皆已知。則如同第八章 (3.1) 式，

$$(4.3) \quad Z = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)。$$

由此即得

$$\bar{Y} - \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

為 $\mu_2 - \mu_1$ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間。

其次設 σ_1^2, σ_2^2 未知但相等。則如第八章(3.4)式,

$$T_0 = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathcal{T}_{n_1+n_2-2},$$

即 T_0 可當做樞紐量。由此即得 $\mu_2 - \mu_1$ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間如下:

$$(4.4) \quad \bar{Y} - \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

上述二情況下所得之信賴區間, 皆與8.3.1節中檢定 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, vs. $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$, 所得之接受域, 有對偶的關係。

例4.2 設 $n_1 = 16$, $n_2 = 21$, 且 $\bar{X} = 4.31$, $\bar{Y} = 5.22$, $S_1^2 = 0.12$, $S_2^2 = 0.10$ 。因 $f_{0.95, 15, 20} \doteq 2.20$, $f_{0.05, 15, 20} \doteq 0.429$ (見例4.1), 故得 σ_2^2/σ_1^2 之90%信賴區間為

$$\left[\frac{0.10}{0.12} \cdot 0.429, \frac{0.10}{0.12} \cdot 2.20 \right] = [0.358, 1.833].$$

由於1在此區間中, 故接受 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 。

其次

$$\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 0.12 + 20 \cdot 0.10}{16+21-2}} \doteq \sqrt{0.1086} \doteq 0.330.$$

又 $t_{0.975, 30} \doteq 2.042$, $t_{0.975, 40} \doteq 2.021$, 由內插法, 估計 $t_{0.975, 35} \doteq 2.032$ 。因此 $\mu_2 - \mu_1$ 之95%信賴區間為

$$5.22 - 4.31 \pm 2.032 \cdot 0.330 \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{21}},$$

即 $[0.688, 1.133]$ 。

若 σ_1^2, σ_2^2 未知且不等, 則可仿8.3.1節最後所提及的作法: 先取 n_1, n_2 中較小者, 假設為 n_1 , 再將兩組樣本隨機地配成 n_1 對, 並考慮其差, 此 n_1 個差, 以 $Y_1 - X_1, \dots, Y_{n_1} - X_{n_1}$ 表之, 形成i.i.d.的隨機變數, 以 $\mathcal{N}(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2 +$

σ_2^2) 爲共同分佈。則仿9.2節的作法, 可得

$$\bar{Y} - \bar{X} - t_{1-\alpha_2, n_1-1} \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n_1}}, \bar{Y} - \bar{X} + t_{1-\alpha_2, n_1-1} \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n_1}}],$$

爲 $\mu_2 - \mu_1$ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 而

$$\tilde{S} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} (Y_i + X_i - \bar{Y} - \bar{X})^2 / (n_1 - 1)}.$$

上述作法其實是將二組母體併成一組母體。若 n_1, n_2 皆很大, 則可有下述作法:

由於 $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $\bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$, 故 $\bar{Y} - \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$ 。又由第七章例5.3,

$$S_1^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma_1^2, \quad S_2^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma_2^2.$$

故(習題第1題)。

$$(4.5) \quad \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

由上式即可得到在樣本數 n_1, n_2 皆很大之下, $\mu_2 - \mu_1$ 之一近似的信賴區間。

上述近似的方法適用範圍很廣, 並不限二組母體皆要有常態分佈。

9.5 信賴區間的涵意

我們已對信賴區間做了一些基本的介紹。如9.1節所述, 以信賴區間來估計參數, 乃較點估計更可信賴。雖然信賴區間已被廣泛地使用在各種統計分析中, 但其中有些概念我們仍須特別提出來說明。

首先一經觀測後所得的信賴區間, 如例3.1中的 $[0.149, 0.431]$, 有二固定的端點, 因此若說該區間有0.95的機率, 會包含 θ 之真實值, 便不恰

當。參數 θ 雖未知，卻為某一常數。此特定的區間要嘛包含 θ ，要嘛不包含 θ ，即包含 θ 的機率不是1就是0，絕不是以0.95的機率包含 θ 。在例2.1中，於在 $\sigma = 1$ 之下，隨機區間 $[\bar{X} - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X} + 1.96/\sqrt{n}]$ 包含 μ 之機率約為0.95。但這是在取樣前，取樣後得到的特定區間 $[1.308, 2.092]$ ，就不能說它包含 μ 之機率約為0.95。

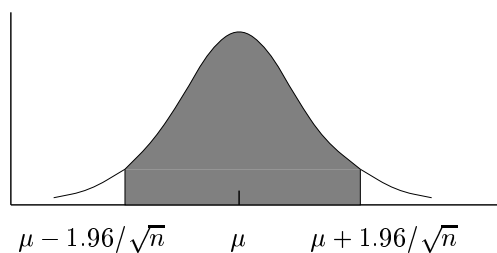
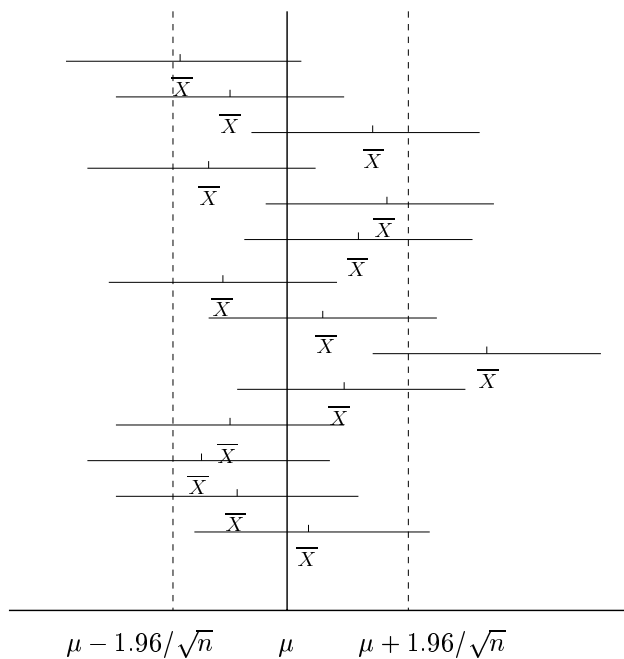
奈曼等統計學家，當初就注意到其中的微妙，因此刻意避開“機率”二字，而採用“信賴”：信賴係數，信賴區間。但即使如此，許多在其統計分析中，經常使用信賴區間的人，還是常犯錯。最典型的講法是說“有百分之九十五的信心，保證參數 μ 的真實值會落在區間 $[1.308, 2.092]$ 中”，這當然是不正確的說法。

藉圖形來說明。圖5.1為 $\mathcal{N}(\mu, 1)$ 分佈之樣本平均 $\bar{X}$ 之p.d.f的圖形，圖5.2為依序取樣14次(每次皆取 n 個樣本)，所得之14個95%信賴區間。若 $\bar{X}$ 介於 $\mu - 1.96/\sqrt{n}$ 及 $\mu + 1.96/\sqrt{n}$ 之間，則得到的信賴區間會包含 μ 。由於圖5.1中機率密度函數的圖形介於 $\mu - 1.96/\sqrt{n}$ 與 $\mu + 1.96/\sqrt{n}$ 間之面積約為0.95， $\bar{X}$ 會落在此範圍內之機率便也約為0.95。圖5.2中之14個信賴區間，第9個並未包含 μ 值。但由頻率對機率的解釋，我們知道若取樣夠多次(因此得到很多 $\bar{X}$ 之觀測值 $\bar{x}$)，則其中約有95%個(口語有時講二十次中有十九次)信賴區間會包含 μ 。至於對任一特定的區間，說它有95%的機率會包含 μ ，是沒有意義的。因這一特定的區間已非隨機區間，此區間包含常數(但未知) μ 的機率不是1便是0。這也足以說明為何一般統計學家較不喜歡說參數 μ “落在”(falls)某一區間，而傾向說一區間“包含”(covers, 或說涵蓋)一參數 μ 。要知參數 μ 並非隨機，它是“不動”的，因此說它會落在那一特定的區間較不妥當。當然在取樣前，說 μ 會落在 $[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$ 中之機率約為0.9544就無妨了。

最後我們來看信賴區間與品質管制的關連。

我們知道，對同一信賴係數，信賴區間並不唯一。例如除了(2.2)式之外，在 σ^2 已知之下，對 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈，

$$I_1 = \left[\bar{X} - z_{1-2\alpha/3} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/3} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

圖5.1 $\bar{X}$ 之機率密度函數的圖形圖5.2 對 $\mathcal{N}(\mu, 1/n)$ 經由重複取樣所得之14個95%信賴區間

亦為 μ 之一信賴係數為 $1 - \alpha$ 之信賴區間。只是由圖5.1可看出(假如你有些幾何的概念), 區間 I_1 的長度大於(2.2)式所給區間之長度(見9.2節習題第3題)。一般而言, 信賴區間的長度愈短愈好, 愈短表愈精確。假設你給出一參數 μ 之95%信賴區間, 若此區間極長, 說不定有人會取笑你乾脆取為 $(-\infty, \infty)$, 保證 μ 落在此區間(這時可講“落在”了)。

有些工廠的品質管制(以下簡稱品管)人員,便以(2.2)式中之信賴區間,作為品管之依據。假設某產品之規格(如長度、重量等)須為 μ 。給定 $1-\alpha$ 值,經隨機抽取 n 個樣本後,得到一如(2.2)式之 $1-\alpha$ 信賴區間(σ 假設為已知)。則若此區間包含 μ ,便認為該批產品為合格,否則認為不合格。偶而有品管人員心存疑惑,取樣愈多(n 愈大),則信賴區間的長度愈短(圖5.1中之區間長度為 $3.92\sigma/\sqrt{n}$,隨著 n 增大而變小),因此愈不容易包含 μ ,如此一來,不是產品愈容易被判定不合規格嗎?所以他們對取樣愈多存有抗拒之心(更何況取樣多本來就已較麻煩)。你認為他們的抗拒合理嗎?檢視圖5.2,區間長度若較短,則的確較不容易包含 μ 之實際值,品管人員之排斥較大的 n 似乎是有道理的。

若採用(2.2)式做為信賴區間,對一固定產品(因此 σ 相同),在同一 $1-\alpha$ 值之下,信賴區間隨著 n 之增大而變短。但不要忘記, $1-\alpha$ 沒有改變,換句話說,對這些或長或短的區間,在取樣前,我們皆有相同的 $100(1-\alpha)\%$ 信心,認為該區間會包含 μ 。所以就理論而言,認為 n 較大時, μ 便較不易落在對應之信賴區間,其實是沒有道理的,故此實為不成問題的問題。

由大數法則知, n 愈大時, $\bar{X}$ 有愈靠近 μ 之傾向,即“在某種意義下”,隨著 n 之變大, $\bar{X}$ 會趨近至 μ 。因此 n 愈大時,以 $\bar{X}$ 為中心,只需要較小的半徑(長度為 $z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$),該區間仍有相同的機率 $1-\alpha$ 會涵蓋 μ 。有點像若飛彈射得愈準,則雖爆破半徑較小,對目標物仍可有相同的摧毀效果。

其次就是涵蓋 μ 的機率若相同,我們較偏好區間長度較小者。原因很簡單,區間長度愈短,表示推論愈精準。拿出兩個區間,其一長度為10,其二為5,你宣稱二者皆有0.95的機率會涵蓋 μ ,一般人當然覺得後者較準。這就是取樣較多(n 較大)所換得之代價。下例亦顯示信賴區間太大之缺失。

例5.1 在某項選舉中有兩位候選人,欲了解選民對其中某一特定候選人之支持程度。隨機抽樣50人,發現其中有27人支持該候選人。問此時該候選人是否可安心地以為穩操勝券?

解.一般在這類民調裡,取樣後皆不放回,不會訪問一人兩次。但假設選

民總數夠多，因而可忽略取樣後不放回，與取樣後放回間之差異。則本問題可採用下述機率模型：設 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d. 以 $B(1, p)$ 為其共同分佈，其中 p 為選民支持該特定候選人之比率。我們即是以二項分佈取代超幾何分佈。由例 3.1，得到 p 之一近似的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間為

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]。$$

因 $\bar{x}_n = 27/50 = 0.54$ ，且 $\sqrt{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)} = \sqrt{0.54 \times 0.46} \doteq 0.498$ ，故 p 之近似的 95% 信賴區間為

$$[0.54 - 0.498 \cdot 1.96/\sqrt{50}, 0.54 + 0.498 \cdot 1.96/\sqrt{50}] \doteq [0.402, 0.678]。$$

由於上述區間包含小於 0.5 的部分 $[0.402, 0.5)$ ，且長度並不算短，故雖事先的抽樣顯示該候選人的支持度較高，在選舉時若該候選人落敗並不足為奇。

但若取樣增加為 $n = 1,000$ ，且得到 540 個支持者，則 $\bar{x}_n$ 仍為 0.54，但此時 p 之近似的 95% 信賴區間成為 $[0.510, 0.571]$ ，區間長度不但變短，且 0.5 位於此區間之左側。因此在相等的 $\bar{x}_n$ ，且同樣的信賴係數之下，後者 (n 較大，區間較短) 顯然給我們一個較精確的推論。

習題

第 9.1 節

1. 設 X 有 $\mathcal{E}(1)$ 分佈。試求

(i) 隨機區間 $(X, 3X)$ 包含點 3 之機率；

(ii) (i) 中隨機區間長度之期望值。

(解. (i) $e^{-1} - e^{-3}$, (ii) 2)

2. 設 X_1, X_2 為由 p.d.f. $f(x) = 1/4, x = 1, 2, 3, 4$ ，所產生之隨機樣本。試求隨機區間 $(1, X_1 + X_2 - 1/2)$ 包含 3 之機率。(解. 13/16)

3. 設 X_1, X_2 為由 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈所產生之隨機樣本。試求隨機區間 $(X_1/(3X_2), 2X_1/X_2)$ 包含 $2/3$ 之機率。(解. $7/12$)
4. 設 X 有 χ_{16}^2 分佈。試求隨機區間 $(X, 3.304X)$
- (i) 包含 26.3 之機率;
- (ii) 長度之期望值。
- (解. (i) 約 0.90 , (ii) 約 36.864)
5. 設 $X_1, \dots, X_{10}$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。令 $Y = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2$ 。試求隨機區間 $(Y/20.48, Y/3.25)$
- (i) 包含 σ^2 之機率;
- (ii) 長度之期望值。
- (解. (i) 約 0.95 , (ii) $10\sigma^2(1/3.25 - 1/20.48) \doteq 2.636\sigma^2$)
6. 設 $L = L(\mathbf{X})$, $U = U(\mathbf{X})$, 分別滿足 $P_\theta(L(\mathbf{X}) \leq \theta) = 1 - \alpha_1$, $P_\theta(U(\mathbf{X}) \geq \theta) = 1 - \alpha_2$, 且 $L \leq U$ 。試證 $P_\theta(L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X})) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$ 。
7. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta]$ 分佈所產生之隨機樣本。試證 $T = X_{(n)}/\theta$ 之p.d.f.為 $f_T(t) = nt^{n-1}$, $0 < t \leq 1$ 。
8. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\theta, 1)$ 分佈所產生之隨機樣本。又設 $[\bar{X} - z_{0.975} \cdot 1/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{0.975}/\sqrt{n}]$ 為 θ 之一 95% 信賴區間。對一與 $X_1, \dots, X_n$ 獨立且有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈之隨機變數 X_{n+1} , 令 p 表 X_{n+1} 落在前述信賴區間之機率。試判斷 p 與 0.95 之大小。
9. 設 X 之p.d.f.為 $f(x) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}$, $x > 0$, $\theta > 0$ 。設 $0 < \alpha < 1$, 試求 k 之值, 使得 $(0, kX]$ 為 θ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間(解. $k = (-\log(1 - \alpha))^{-1}$)
10. 設 X_1, X_2 為由 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本。令 $R = X_{(2)} - X_{(1)}$ 。
- (i) 試證 R 之p.d.f.為

$$f(r) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - r), 0 < r < \theta.$$

(ii) 利用(i), 試求 c 之值, 使得 (R, cR) 為 θ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間。

(解. (i) $c = (1 + \sqrt{1 - \alpha})/\alpha$)

第9.2節

1. 試證表2.1中之三個統計量皆為樞紐量。
2. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由有 $\sigma^{-1}f((x - \theta)/\sigma)$ 型式之p.d.f.所產生之隨機樣本。試給出5個不同的樞紐量。
3. 在例2.1中, 於 σ 已知之下, 在信賴係數 $1 - \alpha$ 之下, 試證信賴區間 $[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$ 之長度短於 $[\bar{X} - z_{1-2\alpha/3}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/3}\sigma/\sqrt{n}]$ 之長度。
4. 給定 $-0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 試證 $z_{1-\alpha_1} + z_{1-\alpha_2}$ 之極小值發生在 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 。
5. 給定 $n \geq 1$ 及 $0 < \alpha < 1$, 對任意 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 試證 $t_{1-\alpha_1, n} + t_{1-\alpha_2, n}$ 之極小值發生在 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ 。
6. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其中 μ, σ^2 皆為未知。
 - (i) 試證(2.10)式給出一 σ^2 的 $1 - \alpha$ 單邊上信賴界;
 - (ii) 試說明對一給定的信賴係數 $1 - \alpha$, 及一固定的長度, 如何給一 $\log \sigma^2$ 之信賴區間;
 - (iii) 設 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 16.52$, $n = 2$, $\alpha = 0.01$, 則(i)中之 $1 - \alpha$ 單邊上信賴界為何?
7. 設 X 有 $Be(\theta, 1)$ 分佈, $\theta > 0$, 令 $Y = -2\theta \log X$ 。試證 Y 有 $\mathcal{E}(1/2)$ 分佈。
8. 設 $X_1, \dots, X_{20}$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, 80)$ 分佈所產生之隨機樣本。又設觀測到 $\bar{X} = 81.2$ 。試給出一 μ 的95%信賴區間。(解. $[77.28, 85.12]$)
9. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, 9)$ 分佈所產生之隨機樣本。求最小的 n , 使得 $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$ 為 μ 的信賴係數至少是90%之信賴區間。(解. 25)

10. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{B}e(1, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其中 $\theta > 0$ 。試給出一 θ 的 $1 - \alpha$ 信賴區間。
11. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{P}a(c, q)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其中 $c > 0$ 為已知。試給出一 q 的 $1 - \alpha$ 信賴區間。
12. 在例2.5中, 令 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 。試證
 - (i) $f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(\theta - r)/\theta^n, 0 < r \leq \theta$;
 - (ii) 有 $[R, R/c]$ 型式之區間, 其中 c 為 $c^{n-1}(n - (n-1)c) = \alpha$ 之一根, 為基於 R, θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間;
 - (iii) (2.17) 式之區間期望長度小於 (ii) 中區間之期望長度。
13. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 p.d.f. $f(x) = e^{-(x-\theta)}, x > \theta$, 所產生之隨機樣本, 其中 $\theta \in R$ 。試證
 - (i) $T = 2n(X_{(1)} - \theta) \sim \chi^2_2$;
 - (ii) 有 $[X_{(1)} - b/(2n), X_{(1)} - a/(2n)]$ 型式之區間, 可當做基於 T, θ 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間;
 - (iii) (ii) 中信賴區間長度最短的為 $[X_{(1)} - \chi^2_{1-\alpha, 2}/(2n), X_{(1)}]$ 。
14. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。
 - (i) 設 $\sigma^2 = 9$, 且觀測到 $n = 16, \bar{X} = 19.3$, 試給出 μ 之一 90% 信賴區間;
 - (ii) 利用 (i) 中之資訊, 試給出 μ 之一 90% 單邊上信賴界及 90% 單邊下信賴界;
 - (iii) 設 $\sigma^2 = 9$ 。利用 (2.2) 式, 試求出使 90% 信賴區間長度不超過 2, 所需最小樣本數 n ;
 - (iv) 設 σ^2 未知, 且觀測到 $n = 16, \bar{X} = 19.3, S^2 = 10.24$ 。試給出 μ 之一 90% 信賴區間;
 - (v) 利用 (iv) 中之資訊, 試給出一 σ^2 之 99% 信賴區間。

(解. (i) [18.1, 20.5], (ii) 18.3, 20.3, (iii) 25, (iv) [17.9, 20.7], (v) [4.68, 33.39])

15. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{E}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本。

(i) 試給出 θ 之一 $1 - \alpha$ 單邊上信賴界;

(ii) 設觀察到 $n = 50$, $\bar{X} = 17.9$, 試求 θ 之一 95% 單邊上信賴界;

(iii) 對一給定的 $t > 0$, 試給一 $P(X \leq t) = 1 - e^{-\theta t}$ 之 95% 單邊上信賴界。

(解. (i) $\chi^2_{1-\alpha, 2n}/(2n\bar{X})$, (ii) 0.06944, (iii) $1 - e^{-0.06944t}$)

16. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 p.d.f. $f(x) = e^{-(x-\eta)}$, $x > \eta$, 所產生之隨機樣本。

(i) 試證 $Q = X_{(1)} - \eta$ 為一樞紐量;

(ii) 試給一 η 之一 $1 - \alpha$ 信賴區間;

(iii) 設觀察到 19 個樣本: 162, 200, 271, 320, 393, 508, 539, 629, 706, 777, 884, 1008, 1101, 1182, 1463, 1603, 1984, 2355, 2880, 試給出一 η 之 90% 信賴區間。

(解. (i) $Q \sim \mathcal{E}(n)$, (ii) $[X_{(1)} + \frac{1}{n} \log(\alpha/2), X_{(1)} + \frac{1}{n} \log(1 - \alpha/2)]$, (iii) [161.842, 161.997])

17. 某油漆製作商欲了解某新型油漆, 從漆上至乾所需時間。假設此段時間有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, 其中 σ^2 為未知。經找 12 塊等面積之區域做實驗, 並量測時間(以分為單位), 得樣本平均 32.5, 樣本變異數 8.4。試給出 μ 之一 95% 信賴區間。(解. [27.163, 37.837])

18. 某公司欲了解其生產之某種電燈開關, 使用多少次後會壞掉, 假設次數有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, 其中 σ^2 為未知。取 8 個開關做實驗, 而得使用次數之樣本平均 168.479(次), 樣本標準差 12.851(次)。試給出 μ 之一 99% 信賴區間。(解. [76.34, 260.62])

第9.3節

1. 在例3.1中, 試證對 $\forall n \geq 1$ 及 $0 < \alpha < 1$, 皆有 $0 \leq L(\bar{X}) < U(\bar{X}) \leq 1$ 。
2. 試分別得到(3.6)式及(3.7)式所給之二近似的信賴區間。
3. 試由(3.2)式導出(3.10)式, 並因而得(3.11)式。
4. 在例3.2中, 試利用(3.12)式, 得到 θ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。
5. 在例3.1中, 設 $\bar{X} = 0.41$, $\alpha = 0.10$, $n = 300$ 。試分別利用(3.2)及(3.5)式, 得到 θ 的0.95近似信賴區間。
6. 在例3.1中, 設 $\alpha = 0.05$, $n = 1,200$ 。試求此時抽樣誤差在正負多少百分點以內?
7. 設投擲一銅板400次, 得到140個正面。試分別利用(3.2)及(3.5)式, 得到出現正面機率 p 之一95%信賴區間(求至小數第三位)。(解. $[0.305, 0.398]$, $[0.303, 0.397]$)
8. 某大城之市政府, 對某項議題做民調。經隨機取樣訪問1,000位居民, 得到420位支持。試分別利用(3.2)及(3.5)式, 得到支持比率 p 之一95%信賴區間(求至小數第二位)。(解. 皆為 $[0.39, 0.45]$)
9. 在例3.3中, 試導出 $X_{(1)}$ 之分佈函數確如(3.15)式所給。
10. 在例3.3中, 設 $X_{(1)} = 2.5$, $n = 20$, 試給出 θ 之一95%信賴區間。
11. 設有事件 $A_1, \dots, A_r$, $r \geq 2$, 試證

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_r) \geq P(A_1) + \dots + P(A_r) - (r - 1),$$

此為 r 個事件之邦弗朗尼不等式。

12. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組隨機樣本, 且期望值 μ 及變異數 σ^2 皆存在。又設 σ^2 已知, 且 n 很大。
 - (i) 試利用中央極限定理, 得到 μ 之一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間;
 - (ii) 當 $n = 100$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.05$, 試給出(i)中之信賴區間;

(iii) 當 $\sigma = 1$, $\alpha = 0.05$, 試求最小的 n , 使得(i)中之區間長度不超過0.1。

(解. (i) $[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$, (ii) $[\bar{X} - 0.196, \bar{X} + 0.196]$,

(iii) 1537)

13. 在上題中, 假設 μ 及 σ^2 皆未知, 則可利用(3.17)式得到 μ 之一近似的信賴區間。

(i) 設 $n = 100$, $\alpha = 0.05$, 給出此區間(以 $\bar{X}$, S 的函數表之);

(ii) 試證 $n \rightarrow \infty$ 時, (i)中之區間長度機率收斂至0。

(解. (i) $[\bar{X} - 0.196S, \bar{X} + 0.196S]$)

第9.4節

1. 試證(4.5)式。

2. 試由(4.5)式, 在 n_1, n_2 皆很大, 且 σ_1^2, σ_2^2 未知且不等之下, 對兩組獨立的 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 及 $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 母體, 得到一近似的 $1 - \alpha$ 信賴區間。

3. 設 $X_1, \dots, X_{n_1}$ 及 $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 分別為由 $\mathcal{E}(\theta_1)$ 及 $\mathcal{E}(\theta_2)$ 分佈所產生之隨機樣本。令 $U = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $V = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 。試利用 $(2\theta_1 U)/(2\theta_2 V)$ 有 $\mathcal{F}_{2n_1, 2n_2}$ 分佈, 得到 $-\theta_1/\theta_2$ 之 $1 - \alpha$ 信賴區間。

4. 設 $X_1, \dots, X_{45}$ 為一組由 $\mathcal{P}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, θ 之事前分佈為 $\Gamma(2, 1)$ 。試給出 θ 之一95%貝氏信賴區間。(解. [13.5, 210])

5. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{E}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, 又設 θ 之事前分佈為 $\mathcal{E}(\beta)$, 其中 $\beta > 0$ 為已知。

(i) 試給出 $-\theta$ 的 $1 - \alpha$ 貝氏信賴區間;

(ii) 試給出 $-\mu = 1/\theta$ 的 $1 - \alpha$ 貝氏信賴區間;

(iii) 當 $n = 10$, $\bar{X} = 5$, $\beta = 2$, 試給出 θ 之一90%貝氏信賴區間。

(解. (i) $[\chi_{\alpha/2, 2n+1}^2/(2(n\bar{X}+\beta)), \chi_{1-\alpha/2, 2n+2}^2/(2(n\bar{X}+\beta))]$, (iii) [0.119, 0.326])

參考文獻

1. Antle, C.E. and Bain, L.J.(1969). A property of maximum likelihood estimators of location and scale parameters. *Siam Review*, 11, 251-253.
2. Bain, L.J. and Engelhardt(1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, 2nd ed. PWS-KENT Publishing Company, Boston, Massachusetts.
3. Bickel, P.J. and Doksum, K.A.(1977). *Mathematical Statistics-Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day, San Francisco, California.
4. Roussas, G.G.(1997). *A Course in Mathematical Statistics*, 2nd ed. Academic Press, New York.
5. Tate, R.F. and Klett, G.W.(1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 54, 674-682.