

第四章

隨機樣本及其他

4.3 常態分佈之隨機樣本

由於常態分佈的重要性, 本節我們專門討論關於常態分佈之隨機樣本的一些性質。仍以 $\bar{X}_n, S_n^2$ 分別表樣本平均及樣本變異數。

定理3.1 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。則 $\bar{X}_n$ 與 S_n^2 獨立, 且 $\bar{X}_n$ 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ 分佈, $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ 有 χ_{n-1}^2 分佈。

證明. 我們以數學歸納法來證明。首先對 $\forall n \geq 1$, $\bar{X}_n$ 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ 分佈是很明顯的。若 $n = 2$, 則 $\bar{X}_2 = (X_1 + X_2)/2$, 且經簡單的化簡可得 $S_2^2 = (X_1 - X_2)^2/2$ 。因 $(X_1 - X_2)/\sqrt{2}$ 有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分佈, 故 S_2^2/σ^2 有 χ_1^2 分佈。最後因 $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$, 故 $X_1 + X_2$ 與 $X_1 - X_2$ 獨立(亦見第三章例3.4), 因此 $\bar{X}_2$ 與 S_2^2 獨立。

假設對某 $n \geq 2$, $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ 有 χ_{n-1}^2 分佈, 且 $\bar{X}_n$ 與 S_n^2 獨立, 我們要推導出此結果對樣本數為 $n+1$ 亦成立。我們有下述二關係式(見第4.1節習題第5題):

$$(3.1) \quad \bar{X}_{n+1} = (n\bar{X}_n + X_{n+1})/(n+1),$$

2 第四章 隨機樣本及其他

$$(3.2) \quad nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + \frac{n}{n+1}(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2。$$

因 $\bar{X}_n$ 與 X_{n+1} 獨立, 且分別有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ 及 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, 故 $X_{n+1} - \bar{X}_n$ 有 $\mathcal{N}(0, ((n+1)/n)\sigma^2)$ 分佈, 因此 $(n/(n+1))(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2$ 之分佈為一 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 隨機變數之平方。又因 $\bar{X}_n$ 與 S_n^2 獨立, 且 X_{n+1} 亦與 S_n^2 獨立, 故(3.2)式右側兩項獨立, 因此 nS_{n+1}^2/σ^2 有 χ_n^2 分佈。其次再度因 $\bar{X}_n$ 與 S_n^2 獨立, 故由(3.1)式可看出 $\bar{X}_{n+1}$ 與 S_n^2 獨立, 且因

$$\text{Cov}(n\bar{X}_n + X_{n+1}, X_{n+1} - \bar{X}_n) = \sigma^2 - n\sigma^2/n = 0,$$

故 $\bar{X}_{n+1}$ 與 $X_{n+1} - \bar{X}_n$ 亦獨立。由此即得 $\bar{X}_{n+1}$ 與 S_{n+1}^2 獨立。證畢。

在上述證明中, 我們主要用到常態分佈的幾個特性: 其一為若隨機變數 X 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, 則 $(X - \mu)^2/\sigma^2$ 有 χ_1^2 分佈(見2.3.6節)。其二為設 X, Y 為二獨立的隨機變數, 且皆有常態分佈, 令 $Z_1 = a_1X + b_1Y$, $Z_2 = a_2X + b_2Y$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 則 (Z_1, Z_2) 有二變數常態分佈(見3.6節之性質(vii))。其三為若 (U, V) 有二變數常態分佈, 則 U 與 V 獨立, 若且唯若 $\text{Cov}(U, V) = 0$ (見3.6節之性質(iv))。

關於 $\bar{X}_n$ 與 S_n^2 獨立之證法仍有不少, 不同的作者提供他們認為易於為初學者所接受的證法。在稍後4.4節我們將介紹另一藉由多變量常態隨機變數的證法。

註3.1 附帶一提, 對gamma分佈, $\bar{X}_n$ 與 S_n 間亦有一特殊關係。即設 $n \geq 3$, 且 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由非負且非退化的分佈所產生之隨機樣本。則樣本變異係數 $S_n/\bar{X}_n$ 與 $\bar{X}_n$ 獨立, 若且唯若 $X_1, \dots, X_n$ 之共同分佈為gamma分佈。即 $S_n/\bar{X}_n$ 與 $\bar{X}_n$ 獨立, 為gamma分佈之一特性。

常態分佈與卡方分佈關係密切。利用獨立的卡方分佈之和, 仍為卡方分佈, 只是自由度要相加, 可得下述結果。

定理3.2 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。則

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2。$$

下例為一大樣本下的結果。

例3.1 設有一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之樣本數為 n 之隨機樣本, 其樣本變異數以 S_n^2 表之。則先由定理3.1, 得

$$(3.4) \quad V_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2。$$

再由例2.9, 得

$$(3.5) \quad \frac{V_n - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

將(3.5)式中之 V_n 以 $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ 取代, 得

$$(3.6) \quad \frac{\sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2)}{\sigma^2\sqrt{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

(3.4)式給出 S_n^2 之確切的分佈: $S_n^2 \sim \sigma^2 \chi_{n-1}^2 / (n-1)$ 。(3.6)式則指出 n 較大時, S_n^2 的分佈近似於 $\mathcal{N}(\sigma^2, 2\sigma^4/(n-1))$ 。

利用定理2.4, 取 $Z_n = S_n^2$, $b = \sigma^2$, $a_n = \sqrt{n-1}/(\sigma^2\sqrt{2})$, $g(x) = \sqrt{x}$, 則 $g(Z_n) = S_n$, $g(b) = \sigma$, $g'(b) = 1/(2\sigma)$, 且得

$$(3.7) \quad a_n(g(Z_n) - g(b)) = \frac{\sqrt{n-1}(S_n - \sigma)}{\sigma^2\sqrt{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{1}{2\sigma} \mathcal{N}(0, 1)。$$

4 第四章 隨機樣本及其他

即 n 較大時, S_n 的分佈近似於 $\mathcal{N}(\sigma, \sigma^2/(2(n-1)))$ 。

底下我們介紹在統計分析裡兩個很重要的分佈。首先是英國統計學家高賽特(Gosset, 1876-1937)在二十世紀初期, 以筆名Student最先引進的 **t 分佈**。此分佈又稱Student distribution, 或Student's t distribution。關於高賽特的一些事蹟, 可參考葉偉文譯(2001)第三章。

定義3.1 設 X, Y 為二獨立的隨機變數, 分別有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 及 χ_n^2 分佈。令

$$(3.8) \quad T = X/\sqrt{Y/n},$$

則稱 T 有**自由度 n 之 t 分佈**(t distribution with k degrees of freedom), 以 $\mathcal{T}_n$ 表之。

我們求上述 T 之p.d.f.如下。首先 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} y^{n/2-1} e^{-y/2}, x \in R, y > 0。$$

若令 $S = Y$, 由

$$t = x/\sqrt{y/n}, \quad s = y,$$

得

$$x = t\sqrt{s}/\sqrt{n}, \quad y = s,$$

且

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{s}/\sqrt{n}, & t/(2\sqrt{s}\sqrt{n}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n}}。$$

故得

$$f_{T,S}(t, s) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} e^{-t^2 s/(2n)} \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} s^{n/2-1} e^{-s/2}, t \in R, s > 0。$$

由上式便可求出 T 之邊際p.d.f.:

$$(3.9) \quad f(t) = \int_0^\infty f_{T,S}(t, s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)2^{(n+1)/2}} \int_0^\infty s^{(n-1)/2} e^{-((1+t^2/n)/2)s} ds \\
&= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} (1+t^2/n)^{-(n+1)/2}, t \in R.
\end{aligned}$$

此處用到

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad &\int_0^\infty s^{(n-1)/2} e^{-((1+t^2/n)/2)s} ds \\
&= \Gamma((n+1)/2) 2^{(n+1)/2} (1+t^2/n)^{-(n+1)/2}.
\end{aligned}$$

這只要藉助gamma分佈之p.d.f.的積分爲1便可得證，證明留在習題中（第1題）。

讀者是否注意到，在 t 分佈裡，若自由度 $n=1$ ，則得到柯西分佈 $C(0, 1)$ 。即 $C(0, 1)$ 分佈爲 t 分佈之一特例。

所有 t 分佈之p.d.f.皆爲偶函數，但 t 分佈之動差母函數並不存在，它的動差也並非都存在。設 T 有 $\mathcal{T}_n$ 分佈，則利用瑕積分收斂發散之判別法，可驗證對整數 l ， $E(T^l)$ 存在，若且唯若， $-1 < l < n$ （即 $0 \leq l \leq n-1$ ）。注意因 T 可取負值，故我們不考慮 l 不爲整數時的 $E(T^l)$ 。這是爲了避免混淆，我們不考慮諸如 $(-16)^{1/2}$ ，以及 $t < 0$ 且 l 不爲整數時的 t^l 。故得 T 的 $n-1$ 次動差存在。但 $\mathcal{T}_1$ 分佈的期望值及 $\mathcal{T}_2$ 分佈的變異數皆不存在。又

$$(3.11) \quad E(T) = 0, n \geq 2,$$

$$(3.12) \quad \text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}, n \geq 3.$$

上二式可經由 T 之p.d.f.直接求得（習題第3題）。事實上 T 之所有動差（只要存在）皆可如下得到。

對奇數 $1 \leq 2r-1 \leq n-1$ ，因 T 之p.d.f.爲偶函數，故

$$(3.13) \quad E(T^{2r-1}) = 0.$$

對偶函數 $2 \leq 2r \leq n-1$ ，首先利用(3.4)式，及 X 與 Y 獨立，得

$$(3.14) \quad E(T^{2r}) = E(X^{2r})E(Y^{-r})n^r.$$

又由第二章(3.27)式及(3.14)式, 得

$$E(X^{2r}) = \prod_{i=1}^r (2i-1),$$

$$E(Y^{-r}) = \frac{2^{-r} \Gamma(n/2 - r)}{\Gamma(n/2)}。$$

將上二式代入(3.14)式, 得

$$(3.15) \quad E(T^{2r}) = \frac{\prod_{i=1}^r (2i-1) \cdot (n/2)^r \cdot \Gamma(n/2 - r)}{\Gamma(n/2)}。$$

上式又可改寫為(習題第4題)

$$(3.16) \quad E(T^{2r}) = \frac{\Gamma(r+1/2)\Gamma(n/2-r)n^r}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)}。$$

例3.2 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。則 $(\bar{X}_n - \mu)/(S_n/\sqrt{n})$ 有 $\mathcal{T}_{n-1}$ 分佈。

證明. 首先由定理3.1 知

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2,$$

且二者獨立。再由定義3.1,

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{(n-1)S_n^2/(\sigma^2(n-1))}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}_{n-1}。$$

前面提過, $\mathcal{T}_1$ 分佈即 $\mathcal{C}(0, 1)$ 分佈, 故當 $n=2$, $(\bar{X}_2 - \mu)/(S_2/\sqrt{2})$ 有 $\mathcal{C}(0, 1)$ 分佈。

當 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, 我們知道

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。若 σ 已知, μ 未知, 則若觀測到 $X_1, \dots, X_n$, 便有 $\bar{X}_n$ 之值, 如此可對 μ 做一些推論。但若 σ 也未知(這是很可能的), 例3.2告訴我們, 由於

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

的分佈知道, 因此可以此為基礎(注意: 若 $X_1, \dots, X_n$ 知道, 則 S_n 也就可求出), 對 μ 做一些推論。也就是以 S_n 取代 σ (大家還記得吧, 在例2.14我們曾指出 $\sigma/S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1$), 而分佈也由 $\mathcal{N}(0, 1)$ 換成 $\mathcal{T}_{n-1}$ 。此結果在第八章及第九章等會屢屢用到。

靈敏的讀者是否已猜出, 當 n 很大時, $\mathcal{T}_{n-1}$ 分佈 ($\mathcal{T}_n$ 分佈也一樣) 應接近 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。這是對的。即

$$(3.17) \quad \mathcal{T}_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)。$$

例2.14已指出這點。事實上由(3.8)式, 因 $Y/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1$ (見(2.15)式), 因此 $\sqrt{Y/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1$ (4.2節習題第16題), 最後利用定理2.3(iv), 即得

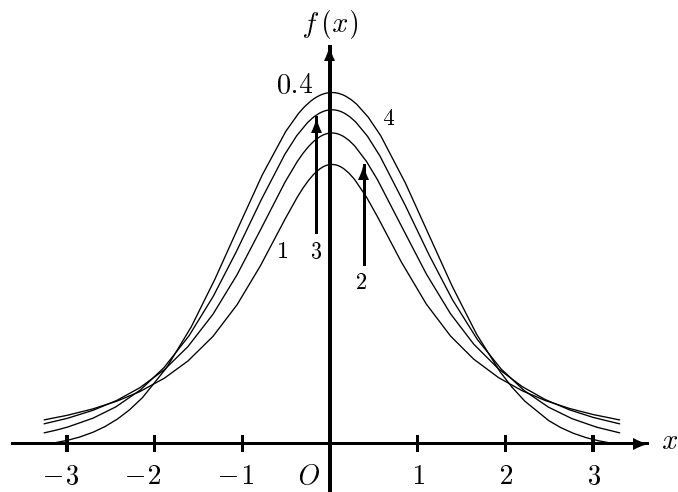
$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \sim \mathcal{N}(0, 1)。$$

利用上述結果, 當 n 較大時, 可以 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈當做 $\mathcal{T}_n$ 分佈之近似。對 $\forall 0 < p < 1$, 令 z_p 及 $t_{p,n}$ 分別表 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈及 $\mathcal{T}_n$ 分佈之 p 分位數 ($P(\mathcal{T}_n \leq t_{p,n}) = p$)。即 n 很大時

$$(3.18) \quad t_{p,n} \doteq z_p。$$

以 $n = 30$ 為例。由附表4及6得 $t_{0.60,30} \doteq 0.256$, $t_{0.70,30} \doteq 0.530$, $t_{0.80,30} \doteq 0.854$, $t_{0.85,30} \doteq 1.055$, $t_{0.90,30} \doteq 1.310$, $t_{0.95,30} \doteq 1.697$, 而 $z_{0.60} \doteq 0.2533$, $z_{0.70} \doteq 0.5244$, $z_{0.80} \doteq 0.8418$, $z_{0.85} \doteq 1.0365$, $z_{0.90} \doteq 1.2814$, $z_{0.95} \doteq 1.645$ 。上述數據顯示 $t_{p,30}$ 與 z_p 算是很接近。圖3.1給出 $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_5$ 及 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈 p.d.f. 之圖形。

其次我們介紹 F 分佈。 F 分佈是為紀念著名的統計學家費雪(R.A. Fisher, 1890-1962, 現代統計學的創始者之一)而得名(F為Fisher的第一個字母)。是為求二變異數的比值而產生。

圖3.1 1,2,3,4分別對應 T_1 , T_2 , T_5 及 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈p.d.f.之圖形

定義3.2 設 U, V 為二獨立的隨機變數, 分別有 χ_n^2 及 χ_m^2 分佈。令

$$(3.19) \quad F = \frac{U/n}{V/m},$$

則 F 稱有**自由度 n 及 m 之 F 分佈**(F distribution with n and m degrees of freedom), 此分佈以 $\mathcal{F}_{n,m}$ 表之。

利用變數代換, 可得(習題第7題) F 之p.d.f.為

$$(3.20) \quad g(x) = \frac{(n/m)^{n/2} x^{(n-2)/2}}{B(n/2, m/2)(1 + (n/m)x)^{(n+m)/2}}, x > 0,$$

其中 $B(\cdot, \cdot)$ 為beta函數(定義見第二章(3.33)式)。又

$$(3.21) \quad E(U^r) = \frac{(m/n)^r \Gamma(n/2 + r) \Gamma(m/2 - r)}{\Gamma(n/2) \Gamma(m/2)}, -\frac{n}{2} < r < \frac{m}{2},$$

其中 r 並不須為整數。由此即得

$$(3.22) \quad E(F) = \frac{m}{m-2}, m \geq 3,$$

$$(3.23) \quad \text{Var}(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, m \geq 5.$$

(3.21)式只要注意在定義3.2中, U 與 V 獨立, 因此

$$E(F^r) = \left(\frac{m}{n}\right)^r E(U^r) E(V^{-r}),$$

便可得證, 我們留在習題(第8題)中讓各位自行完成。當 X 有 $\mathcal{F}_{n,m}$ 分佈, $1/X$ 亦有 F 分佈, 只是二參數交換。又經過簡單的變換, F 分佈可轉換為beta分佈。此二性質皆留在習題(第7題)中。

底下給幾個 F 分佈p.d.f.之圖形。

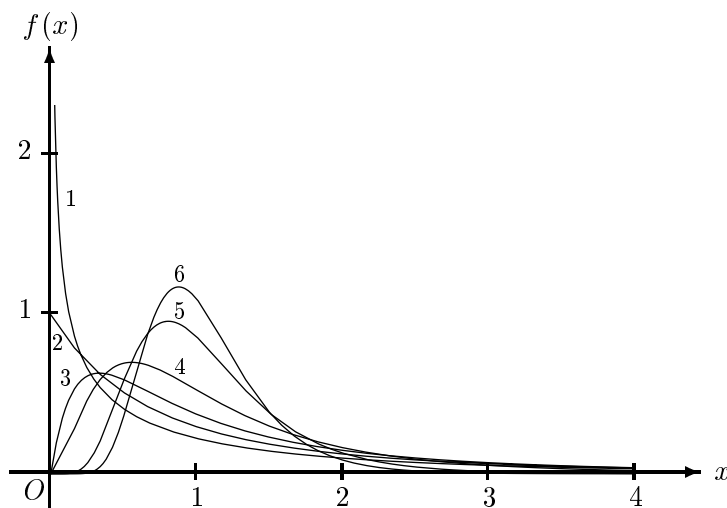


圖3.2 1,2,3,4,5,6分別對應 $\mathcal{F}_{1,6}$, $\mathcal{F}_{2,4}$, $\mathcal{F}_{4,4}$, $\mathcal{F}_{6,10}$, $\mathcal{F}_{16,24}$, $\mathcal{F}_{30,32}$ 分佈p.d.f.之圖形

例3.3 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。由定理3.1,

$$\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi_1^2, \quad \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

且二者獨立, 故由定義3.2,

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)^2/(\sigma^2/n)}{(n-1)S_n^2/(\sigma^2(n-1))} = \frac{(\bar{X}_n - \mu)^2}{S_n^2/n} \sim \mathcal{F}_{1,n-1}。$$

與例3.2比較, 即得 $\mathcal{T}_n^2 = \mathcal{F}_{1,n}$, 對 $n \geq 1$ 。故 $\mathcal{T}_n^2$ 之分佈為一特別的 F 分佈。

例3.4 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, $Y_1, \dots, Y_m$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。兩組樣本假設相互獨立。設以 S_X^2, S_Y^2 分別表 $\{X_i\}$ 及 $\{Y_i\}$ 之樣本變異數。則由定理3.1知, $(n-1)S_X^2/\sigma_X^2$ 有 χ_{n-1}^2 分佈, $(m-1)S_Y^2/\sigma_Y^2$ 有 χ_{m-1}^2 分佈。因此由定義3.2,

$$\frac{(n-1)S_X^2/((n-1)\sigma_X^2)}{(m-1)S_Y^2/((m-1)\sigma_Y^2)} = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathcal{F}_{n-1, m-1}。$$

另外, 若 $m \rightarrow \infty$, 則仍由例2.5,

$$\frac{\sigma_Y^2}{S_Y^2} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p} 1,$$

故由定理2.3,

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_Y^2}{S_Y^2} \frac{S_X^2}{\sigma_X^2} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} \frac{S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}。$$

此亦顯示

$$(3.24) \quad \mathcal{F}_{n,m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} \frac{\chi_n^2}{n}。$$

上述結果由 F 分佈之定義亦可看出: 由

$$F = \frac{U/n}{V/m},$$

$U \sim \chi_n^2, V \sim \chi_m^2$, 得(見(2.15)式)

$$\frac{V}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{p} 1,$$

再由定理2.3(iv), 即得(3.24)式。同理可得

$$(3.25) \quad \mathcal{F}_{n,m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{m}{\chi_m^2}。$$

現今 $f_{p,n,m}$ 滿足 $P(\mathcal{F}_{n,m} \leq f_{p,n,m}) = p$, $f_{p,n,m}$ 即為 $\mathcal{F}_{n,m}$ 分佈之第 p 分位數。則(3.24)及(3.25)式分別導致對 $0 < p < 1$,

$$(3.26) \quad f_{p,n,m} \doteq \frac{\chi_{p,n}^2}{n}, m \text{ 很大},$$

$$(3.27) \quad f_{p,n,m} \doteq \frac{m}{\chi_{1-p,m}^2}, n \text{ 很大},$$

其中如前 $\chi_{p,n}^2$ 為 χ_n^2 分佈之第 p 分位數。例如, 由附表7, 得對 $n = 1, \dots, 5$, $f_{0.9,n,60}$ 分別約為2.79, 2.39, 2.18, 2.04, 1.95。又由附表5, 得對 $n = 1, \dots, 5$, $\chi_{0.9,n}^2$ 分別約為2.71, 4.61, 6.25, 7.78, 9.24, 因此 $\chi_{0.9,n}^2/n$ 分別約為2.71, 2.305, 2.083, 1.945, 1.848。與對應的 $f_{0.9,n,60}$ 相比, 誤差並不太大。

要注意的是, 附表7並非如表面上看起來那麼不完整, 雖然只對一些較小的 α , 給出右端機率, 但利用若 X 有 $\mathcal{F}_{n,m}$ 分佈, 則 $1/X$ 有 $\mathcal{F}_{m,n}$ 分佈, 有些左端機率亦可得到。例如, 因

$$P(\mathcal{F}_{4,6} \geq 4.53) \doteq 0.05,$$

又 $1/4.53 \doteq 0.220$, 故

$$P(\mathcal{F}_{6,4} \leq 0.220) \doteq 0.05。$$

讀者必須熟悉利用附表來求與卡方分佈、 t 分佈及 F 分佈之機率有關的值。底下給一例。

例3.5 利用附表5-7可求出下述各值。

- (i) 設 $X \sim \chi_{15}^2$, 則 $P(7.26 \leq X \leq 22.31) \doteq 0.90 - 0.05 = 0.85$ 。
- (ii) 設 $X \sim \chi_{23}^2$, 且 $P(X \leq b) = 0.90$, 則 $b \doteq 32.01$ 。
- (iii) 設 $X \sim \chi_6^2$, 則 $P(X/(1+X) \geq 11/16) = P(X \geq 2.2) \doteq 1 - 0.1 = 0.90$ 。
- (iv) 設 $X \sim \mathcal{T}_{13}$, 則 $P(0.87 \leq X \leq 2.65) \doteq 0.99 - 0.80 = 0.19$ 。
- (v) 設 $X \sim \mathcal{T}_{26}$, 且 $P(X \leq b) = 0.60$, 則 $b \doteq 0.256$ 。
- (vi) 設 $X \sim \mathcal{T}_{23}$, 且 $P(|X| \geq b) = 0.02$, 則 $b = 2.50$ 。
- (vii) 設 $X \sim \mathcal{F}_{7,12}$, 則 $P(2.91 \leq X \leq 8) \doteq 0.050 - 0.001 = 0.049$ 。
- (viii) 設 $X \sim \mathcal{F}_{20,8}$, 則 $P(1/X > 0.25) = P(X < 4) = 1 - P(X \geq 4) \doteq 1 - 0.025 = 0.975$ 。
- (xi) 設 $X \sim \mathcal{F}_{12,20}$, 則 $1/X \sim \mathcal{F}_{20,12}$, 則 $P(X \leq 1/3.07) = P(1/X \geq 3.07) = 0.025$ 。

本節最後給兩個應用的例子。

例3.6 某校學生要求圖書館晚上10時至12時亦開放。圖書館表示若該時段到館人數的平均值，真的超過30人便開放。經測試開放一個月，其中有一天是國定假日晚上不開放，得到29筆該時段到館人數：

30, 32, 29, 9, 25, 25, 32, 41, 49, 44, 37, 12, 13, 44, 31,
45, 55, 52, 16, 26, 39, 40, 46, 58, 38, 9, 15, 39, 46。

如何決定呢？這類問題第八章我們會詳加討論。此處以直觀來看怎樣做是可以接受的。一個辦法是假設每日於該時段到館人數有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈，我們想看在 $\mu = 30$ 的假設下(σ^2 仍設為未知)，會得到上述數據是否合理。要注意的是，人數其實不可能有常態分佈，此因人數必為整數，且不會取負值。不過我們只是以常態做為近似的分佈。

經求出樣本平均及樣本標準差分別約為

$$\bar{X}_{29} \doteq 33.69, \quad S_{29} \doteq 13.98,$$

由此得

$$T = \frac{\bar{X}_{29} - \mu}{S_{29}/\sqrt{n}} \doteq \frac{33.69 - 30}{13.98/\sqrt{29}} \doteq 1.42。$$

因 T 有 $\mathcal{T}_{28}$ 分佈，由附表6得

$$P(T \geq 1.313) \doteq 0.10, \quad P(T \geq 1.701) \doteq 0.05。$$

再利用內插法得

$$P(T \geq 1.42) \doteq 0.10 - \frac{1.42 - 1.313}{1.701 - 1.313} \cdot (0.10 - 0.05) \doteq 0.086$$

(事實上， $P(T \geq 1.42)$ 約為0.0833)。

所以在 $\mu = 30$ 之假設下，僅約有0.086的機率會得到如此大的 T 值。似乎有夠強的證據支持 $\mu > 30$ 。當然還要看主事者的態度。如果圖書館相當重視服務，可能便接受延長開放時間。如果圖書館覺得經費支出為主要的考慮，便可能尚無法被說服需延長開放時間。

例3.7 假設各學生之成績相互獨立, 且在每班中學生之成績有相同的常態分佈, 但在不同班之參數可能不同。今欲判定兩班學生(分別有31及36位學生)成績之變異是否相同。經計算出兩班成績之樣本變異數 $S_X^2 = 196.1$, $S_Y^2 = 690.0$ 。由例3.4, 若 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, 則

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim \mathcal{F}_{30,25}。$$

先計算出 $S_X^2/S_Y^2 = 196.1/690.0 \doteq 0.284$ 。再由附表7得

$$P\left(\frac{1}{F_{30,25}} > 3.33\right) = P(F_{25,30} > 3.33) = 0.001,$$

即

$$P(F_{30,25} \leq \frac{1}{3.33}) \doteq P(F_{30,25} \leq 0.30) \doteq 0.001。$$

故得

$$P(S_X^2/S_Y^2 \leq 0.284) < P(F_{30,25} \leq 0.30) \doteq 0.001。$$

在 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ 之下, 會得到如此小的 S_X^2/S_Y^2 之機率是很低的(小於0.001)。故可合理判定 $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ 。