

第三章

多維隨機變數

3.3 變數代換

在1.5節我們曾介紹單變數的變數代換。對隨機向量 (X, Y) ，有時我們會對 X, Y 的二函數，如

$$(3.1) \quad U = g_1(X, Y),$$

$$(3.2) \quad V = g_2(X, Y),$$

有興趣。如果令 $A = \{(x, y) | f(x, y) > 0\}$ ，其中 $f(x, y)$ 為 X, Y 之聯合p.d.f., $B = \{(u, v) | u = g_1(x, y), v = g_2(x, y), (x, y) \in A\}$ 。則 (U, V) 便是由 A 映至 B 之一變數代換。有時也可能只對一個函數 $W = g(X, Y)$ 有興趣。這兩種情況都屬於兩個變數的變數代換。

例如，令 X 表某位學生第一次考試的成績， Y 表第二次考試的成績。我們可能想對其進步成績 $U = Y - X$ ，與總分 $V = X + Y$ 有興趣，也可能只想對其進步的比率 $W = (Y - X)/X$ 有興趣。 (U, V) 或是單獨的 U, V, W 皆是將原來的隨機向量 (X, Y) 變換(或說轉換)至新的變數。

設由 (X, Y) 經由(3.1)及(3.2)式變換至 (U, V) 。若由(3.1)及(3.2)式可解出唯一的 $X = h_1(U, V)$, $Y = h_2(U, V)$ ，則我們說由 (X, Y) 至 (U, V) 的變

2 第三章 多維隨機變數

換, 爲 $1-1$ 。此時有

$$(3.3) \quad u = g_1(x, y), v = g_2(x, y) \Leftrightarrow x = h_1(u, v), y = h_2(u, v)。$$

例如, 設

$$U = X + Y, \quad V = X - Y,$$

則

$$X = \frac{1}{2}(U + V) = h_1(U, V), \quad Y = \frac{1}{2}(U - V) = h_2(U, V)。$$

故 (X, Y) 至 (U, V) 爲 $1-1$ 變換。另外, 設 X, Y 爲二正的隨機變數, 且令

$$U = XY, \quad V = X/Y,$$

則

$$X = (UV)^{1/2} = h_1(U, V), \quad Y = (U/V)^{1/2} = h_2(U, V),$$

因此 (X, Y) 至 (U, V) 仍為1-1變換。

若 (X, Y) 為離散型的隨機向量，以 $f(x, y)$ 為聯合p.d.f.。則由(3.3)式， (U, V) 之聯合p.d.f.為

$$(3.4) \quad f_{U,V}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v))。$$

此因

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= P(g_1(X, Y) = u, g_2(X, Y) = v) \\ &= P(X = h_1(u, v), Y = h_2(u, v)) \\ &= f(h_1(u, v), h_2(u, v))。 \end{aligned}$$

做變數代換，務必要將新的支撐(即前述 B)找出來。見下例。

例3.1 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y},$$

其中 $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 \leq 1$, x, y 為非負整數，且 $x + y \leq n$ 。令

$$U = X + Y, \quad V = X/(X + Y)。$$

其中當 $X = Y = 0$ 時，令 $V = 0$ 。則

$$X = UV = h_1(U, V), \quad Y = U(1 - V) = h_2(U, V),$$

故 (X, Y) 至 (U, V) 為1-1的變換。因此 (U, V) 之聯合p.d.f.為

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f(uv, u(1-v)) \\ &= \frac{n!}{(uv)!(u(1-v))!(n-u)!} p_1^{uv} p_2^{u(1-v)} (1-p_1-p_2)^{n-u}, \end{aligned}$$

其中 $uv, u(1-v)$ 為非負整數，且 $0 \leq u \leq n$ 。

在做變數代換時，要小心求出新的變數之範圍。底下亦為一例。

例3.2 設 X, Y 為二獨立的隨機變數，分別有 $\mathcal{P}(\lambda)$ 及 $\mathcal{P}(\mu)$ 分佈。則 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}, x, y = 0, 1, 2, \dots。$$

我們想求 $U = X + Y$ 之分佈。

雖然 (X, Y) 至 U 並非1-1的變換，但若引進 $V = Y$ ，則 (X, Y) 至 (U, V) 為1-1的變換，且

$$X = U - V, \quad Y = V。$$

故

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f(u - v, v) \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{u-v}}{(u-v)!} \frac{e^{-\mu} \mu^v}{v!}, v = 0, 1, 2, \dots, u = v, v+1, v+2, \dots。 \end{aligned}$$

有了聯合p.d.f.，便可求出 U 的邊際p.d.f.:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \sum_{v=0}^u \frac{e^{-\lambda} \lambda^{u-v}}{(u-v)!} \frac{e^{-\mu} \mu^v}{v!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{v=0}^u \frac{\lambda^{u-v} \mu^v}{(u-v)! v!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{u!} \sum_{v=0}^u \frac{u!}{(u-v)! v!} \lambda^{u-v} \mu^v \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^u}{u!}, \end{aligned}$$

其中倒數第二個等號右側的和等於 $(\lambda + \mu)^u$ 是用到二項式定理。故得 U 有 $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ 分佈，與例2.16利用拉普拉斯轉換所得相同。

讀者可利用例3.2中的方法，對二獨立的隨機變數 X, Y ，且分別有 $\mathcal{B}(m, p)$ 及 $\mathcal{B}(n, p)$ 分佈，導出 $X + Y$ 有 $\mathcal{B}(m + n, p)$ 分佈，仍與利用拉普拉斯轉換所得相同。

有時我們只對 X, Y 之一函數 $U = g(X, Y)$ 有興趣, 例3.2便提供一典型的作法: 先引進另一隨機變數 $V = h(X, Y)$, 然後求 (U, V) 之聯合分佈, 再求 U 之邊際分佈。

若 (X, Y) 為連續型的隨機向量, 仍以 $f(x, y)$ 為其聯合p.d.f., 則 (U, V) 之聯合p.d.f., 可如單變數的情況(見第一章(5.5)式)得到。即

$$(3.5) \quad f_{U,V}(u, v) = |J(u, v)|f(h_1(u, v), h_2(u, v)),$$

其中

$$(3.6) \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial v}. \end{aligned}$$

J 稱為變換 $x = h_1(u, v)$, $y = h_2(u, v)$ 之**雅可彬**(Jacobian)。令

$$B = \{(u, v) | u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}。$$

我們假設 J 在 B 中不恆為0。(3.5)式的由來是利用重積分之變數代換。即

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(g_1(X, Y) \leq u, g_2(X, Y) \leq v) \\ &= \int \int_A f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^u |J(s, t)| f(h_1(s, t), h_2(s, t)) ds dt, \end{aligned}$$

其中 $A = \{(x, y) | g_1(x, y) \leq u, g_2(x, y) \leq v\}$, 且用到重積分之變數代換, 令 $s = g_1(x, y)$, $t = g_2(x, y)$ 。再利用

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u, v),$$

及微積分基本定理, 即得(3.5)式。

定理3.1 設 X, Y 為二獨立的隨機變數, 分別有 $\Gamma(p, \lambda)$ 及 $\Gamma(q, \lambda)$ 分佈。令 $U = X/(X + Y), V = X + Y$ 。則 U 與 V 獨立, 且 U 有 $\mathcal{B}e(p, q)$ 分佈, V 有 $\Gamma(p + q, \lambda)$ 分佈。

證明. 首先 X, Y 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \frac{x^{p-1}e^{-x/\lambda}}{\Gamma(p)\lambda^p} \frac{y^{q-1}e^{-y/\lambda}}{\Gamma(q)\lambda^q}, x, y > 0。$$

由

$$u = x/(x + y), \quad v = x + y, \quad 0 < u < 1, \quad v > 0。$$

解出

$$x = h_1(u, v) = uv, y = h_2(u, v) = v(1 - u)。$$

則

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1 - u \end{vmatrix} = v。$$

故得

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= |J|f(h_1(u, v), h_2(u, v)) \\ &= v \frac{(uv)^{p-1}e^{-uv/\lambda}(v(1-u))^{q-1}e^{-v(1-u)/\lambda}}{\Gamma(p)\Gamma(q)\lambda^{p+q}}, \\ &0 < u < \infty, 0 < v < 1。 \end{aligned}$$

經化簡後得

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} u^{p-1}(1-u)^{q-1} \frac{v^{p+q-1}e^{-v/\lambda}}{\Gamma(p+q)\lambda^{p+q}}。$$

由定義2.3知, U 與 V 獨立, 且分別有 $\mathcal{B}e(p, q)$ 及 $\Gamma(p + q, \lambda)$ 分佈。

我們說明一下定理3.1。首先此定理涵蓋定理2.4之(iii)。另外, 此定理為數理統計中一重要且特殊的結果。由表面的型式看來, U, V 不

像會獨立: $U = X/(X + Y)$, 而 $V = X + Y$ 剛好是 U 的分母。但對 X, Y 皆為 gamma 分佈, 且有同樣的尺度參數, 則 U 與 V 獨立。事實上此為 gamma 分佈之一特性。即若已知 X 與 Y 為取正值的隨機變數, 且知 $V = X + Y$ 與 $U = X/(X + Y)$ 獨立, 則 X 與 Y 皆為 gamma 分佈, 且有相同的尺度參數, 這是 Lukacs(1955) 所證出, 現已有許多推廣。

底下結果為定理 3.1 之一立即的推論。

系理 3.1 設 U 與 V 獨立, 且 U 有 $Be(p, q)$ 分佈, V 有 $\Gamma(p + q, \lambda)$ 分佈。則 UV 有 $\Gamma(p, \lambda)$ 分佈。

系理 3.1 指出, 當參數有某特殊的關係, 則獨立的 gamma 隨機變數與 beta 隨機變數相乘後, 仍有 gamma 分佈。這是一有趣的結果。另外, 二獨立的 beta 隨機變數相乘後, 亦可能仍有 beta 分佈, 我們留在習題中讓各位自行練習。

再給一個例子。

例 3.3 設 X 與 Y 為二獨立的隨機變數, 且皆有 $\mathcal{U}(1, \beta)$ 分佈, $\beta > 1$ 。令 $U = XY$ 。試求 U 之 p.d.f.。

解. 首先 (X, Y) 之聯合 p.d.f. 為

$$f(x, y) = \frac{1}{(\beta - 1)^2}, 1 < x, y < \beta.$$

令 $V = Y$ 。由 $u = xy, v = y$, 解出

$$x = h_1(u, v) = u/v, \quad y = h_2(u, v) = v.$$

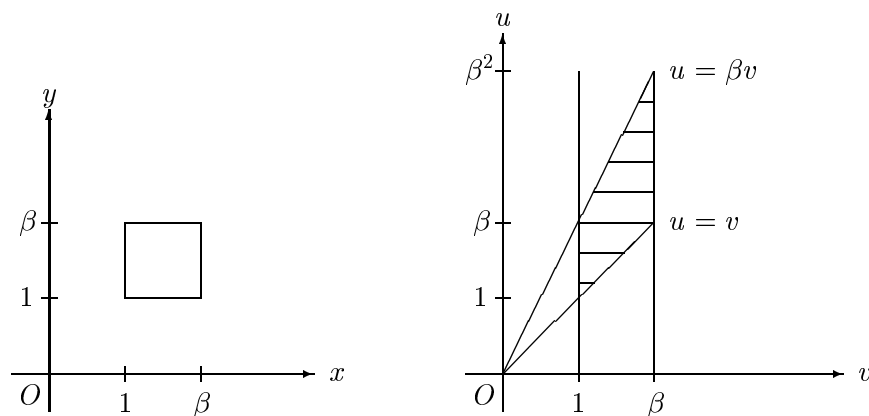
則

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}.$$

故得

$$\begin{aligned} (3.7) \quad f_{U,V}(u, v) &= |J| f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \\ &= \frac{1}{(\beta - 1)^2} \frac{1}{v}, 1 < \frac{u}{v} < \beta, 1 < v < \beta. \end{aligned}$$

我們分別給出 x, y 及 u, v 取值的範圍如下二圖。



由(3.7)式得

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta-1)^2} \int_1^u \frac{1}{v} dv = \frac{\log u}{(\beta-1)^2}, & 1 < u < \beta, \\ \frac{1}{(\beta-1)^2} \int_{u/\beta}^{\beta} \frac{1}{v} dv = \frac{2\log \beta - \log u}{(\beta-1)^2}, & \beta \leq u < \beta^2. \end{cases}$$

可驗證 $f_U(u)$ 確為一 p.d.f. (習題第13題)。

上例顯示, 在做變數代換時, 要小心新變數取值的範圍, 必要時畫一簡圖。底下再給一自表面上看不像獨立, 但卻是獨立的例子。

例3.4 設 X, Y 為獨立, 且 X 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, Y 有 $\mathcal{N}(\gamma, \sigma^2)$ 分佈。令 $U = X + Y$, $V = X - Y$ 。則 U 與 V 獨立, 且 U 有 $\mathcal{N}(\mu + \gamma, 2\sigma^2)$ 分佈, V 有 $\mathcal{N}(\mu - \gamma, 2\sigma^2)$ 分佈。

證明. 令 $u = x + y, v = x - y, u, v \in R$, 解出

$$x = h_1(u, v) = \frac{u + v}{2}, \quad y = h_2(u, v) = \frac{u - v}{2}.$$

則

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

故得

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u, v) &= |J|f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-((u+v)/2-\mu)^2/(2\sigma^2) - ((u-v)/2-\gamma)^2/(2\sigma^2)} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-(u-\mu-\gamma)^2/(2\cdot 2\sigma^2)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-(v-\mu+\gamma)^2/(2\cdot 2\sigma^2)} \right),
\end{aligned}$$

中間的計算過程並不難，讓讀者自行補上。故得證 U 與 V 獨立，且分別有 $\mathcal{N}(\mu + \gamma, 2\sigma^2)$ 及 $\mathcal{N}(\mu - \gamma, 2\sigma^2)$ 分佈。

在上例中，若 $\mu = \gamma = 0$ ，則 U 與 V 不但獨立，且有相同的 $\mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$ 分佈。底下的定理指出，對二獨立的隨機變數，其各自的函數亦獨立。

定理3.2 設 X, Y 為二獨立的隨機變數， $g(x), h(y)$ 分別為 x, y 之函數。則 $U = g(X)$ 與 $V = h(Y)$ 為二獨立的隨機變數。

證明.對任意 $u, v \in R$ ，令

$$A_u = \{x | g(x) \leq u\}, \quad B_v = \{y | h(y) \leq v\}。$$

則

$$\begin{aligned}
F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\
&= P(X \in A_u, Y \in B_v) \\
&= P(X \in A_u)P(Y \in B_v),
\end{aligned}$$

其中最後一等式成立是因 X 與 Y 獨立，故可利用定理2.2(i)。因 $P(X \in A_u)$ 及 $P(Y \in B_v)$ 分別為 u 及 v 之函數，故由系理2.1，即得 U 與 V 獨立。

例3.5 設 X, Y 為二獨立的隨機變數，分別有 $\Gamma(p, \lambda)$ 及 $\Gamma(q, \lambda)$ 分佈。令 $U = X + Y$ ， $V = X/(X + Y)$ 。由定理3.1，知 U 與 V 獨立。再由定理3.2知， U 與 $V^{-1} - 1 = Y/X$ 獨立。

有時由 (X, Y) 至 (U, V) 的變換並非 $1-1$ ，此時可仿單變數時的作法，可參考第一章(5.7)式。即設存在 $A = \{(x, y) | f(x, y) > 0\}$ 之一分割 $A_0, A_1, \dots, A_n$ ，其中 A_0 可能是空集合，滿足 $P((X, Y) \in A_0) = 0$ ，使得對

$\forall i = 1, \dots, k$, $U = g_1(X, Y)$, $V = g_2(X, Y)$ 爲由 A_i 映成至 B 之 $1-1$ 函數。則對 $\forall i = 1, \dots, k$, 由 B 至 A_i 之反函數存在, 以 $x = h_{1i}(u, v)$, $y = h_{2i}(u, v)$ 表第 i 個反函數。對第 i 個反函數, $\forall (u, v) \in B$, 有唯一的 $(x, y) \in A$, 使得

$$(u, v) = (g_1(x, y), g_2(x, y))。$$

令 J_i 表第 i 個反函數之雅可彬。假設 $J_1, J_2, \dots, J_k$ 在 B 中皆不爲 0。則 (U, V) 之聯合 p.d.f. 爲

$$(3.8) \quad f_{U,V}(u, v) = \sum_{i=1}^k |J_i| f_{X,Y}(h_{1i}(u, v), h_{2i}(u, v))。$$

例3.6 設 X 與 Y 爲二獨立的隨機變數, 皆有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。令 $U = X/Y$, $V = |Y|$ 。當 $Y = 0$ 時, 可定義 $U = 1$ (或任何其他常數值)。由於對連續型的隨機變數, $P(Y = 0) = 0$, 所以倒不用擔心 $Y = 0$ 的情況。

因 (x, y) 與 $(-x, -y)$, 對應到相同的 (u, v) , 故由 (X, Y) 至 (U, V) 之變換並非 $1-1$ 。但若令

$$A_1 = \{(x, y) | x \in R, y > 0\}, \quad A_2 = \{(x, y) | x \in R, y < 0\},$$

$$A_0 = \{(x, y) | x \in R, y = 0\},$$

則 A_0, A_1, A_2 形成 $A = R^2$ 之一分割, 且 $P((X, Y) \in A_0) = P(Y = 0) = 0$ 。又 $B = \{(u, v) | u \in R, v > 0\}$ 。在 A_1 或 A_2 上, 由 (X, Y) 至 (U, V) 之變換皆爲 $1-1$ 。由 B 至 A_1 之反函數爲

$$x = h_{11}(u, v) = uv,$$

$$y = h_{21}(u, v) = v。$$

由 B 至 A_2 之反函數爲

$$x = h_{12}(u, v) = -uv,$$

$$y = h_{22}(u, v) = -v。$$

$J_1 = J_2 = v$ 。又

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2 - y^2/2}。$$

故

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{2\pi} |v| e^{-u^2 v^2/2 - v^2/2} + \frac{1}{2\pi} |v| e^{-u^2 v^2/2 - v^2/2} \\ &= \frac{v}{\pi} e^{-(1+u^2)v^2/2}, u \in R, v > 0。 \end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^\infty \frac{v}{\pi} e^{-(1+u^2)v^2/2} dv \quad (\text{令 } v^2 = z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(1+u^2)z/2} dz \\ &= \frac{1}{\pi(1+u^2)}, u \in R。 \end{aligned}$$

即 X/Y 有 $C(0, 1)$ 分佈。

在2.3節介紹柯西分佈時，我們曾提到此分佈有時在我們想不到的地方出現。此即為一例。習題中尚有一些例子， X 與 Y 之變異數也不須為0。

在上例中，若僅是要求 X/Y 之分佈，則可令 $U = X/Y$ ， $V = Y$ 。則此為由 (X, Y) 至 (U, V) 之1-1變換。求出 (U, V) 之聯合p.d.f.

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{v}{2\pi} e^{-(1+u^2)v^2/2}, u, v \in R,$$

之後，再求 U 之邊際p.d.f.，仍得 U 有 $C(0, 1)$ 分佈。