

第三章

多維隨機變數

3.1 聯合及邊際分佈

到目前為止, 我們所討論的隨機變數, 都是所謂**單變數**(univariate), 本章我們要引進**多變數**(multivariate), 或說**多維**(或說**多變量**)隨機變數。

在進行一隨機試驗, 較少的時候才只觀測一隨機變數。很少有說只收集一個數據的。例如, 做民調, 不會只調查一個人; 要了解某地區之國民所得, 不會只取得一個人的所得。有時候我們要比較兩次考試的成績, 則對同一個學生便有兩個數據。身高與體重間之關係, 也是兩個變數。這些例子, 足以說明多維隨機變數也是我們必須熟悉的。

所謂 **n 維的隨機向量**(n -dimensional random vector), 為一由樣本空間 Ω 映至 n 維歐氏空間 R^n 的函數。有時會說 **n 維(或 n 變數)的隨機變數**。本章頭幾節, 我們主要討論 $n = 2$ 的情況, $n > 2$ 的情況至第3.7節再介紹。

假設對 $\forall \omega \in \Omega$, 有一二維的點 (x, y) 與其對應, $x, y \in R$, 則便定義出一個二維的隨機向量。

例1.1 投擲一公正骰子兩次, 樣本空間 Ω 給在第一章例2.3, 共有36個元素。對一樣本點 $\omega = (i, j) \in \Omega$, 表第一次出現 i , 第二次出現 j 。現定義二

2 第三章 多維隨機變數

隨機變數

$$X = \text{兩次點數和} = i + j,$$

$$Y = \text{兩次點數差之絕對值} = |i - j|。$$

例如，若 $(i, j) = (3, 4)$ ，則 $X = 7, Y = 1$ 。而對 $(i, j) = (4, 3)$ ，亦有 $X = 7, Y = 1$ 。

定義出隨機向量 (X, Y) ，我們便可以求經由 (X, Y) 所定義出的事件之機率。這種事件，當然都還是 Ω 的一個子集合，因此才能求出其機率。例如，我們可以問 $(X, Y) = (7, 1)$ ，即 $X = 7$ 且 $Y = 1$ ，之機率為何？即要求 $P((X, Y) = (7, 1))$ ，或是 $P(X = 7 \text{ 且 } Y = 1)$ 。爲了簡便，我們常將後者寫成 $P(X = 7, Y = 1)$ ，即以逗號“,” 表“且”。

不難驗證 Ω 中，使 $X = 7$ 且 $Y = 1$ 的元素，恰就是 $\omega_1 = (3, 4)$ ， $\omega_2 = (4, 3)$ 二樣本點。由於每一樣本點之機率皆爲 $1/36$ 。故

$$P(X = 7, Y = 1) = P(\{(3, 4), (4, 3)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}。$$

另外，

$$\begin{aligned} P(X = 7, Y \leq 4) \\ = P(\{(4, 3), (3, 4), (5, 2), (2, 5)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}。 \end{aligned}$$

表1.1 例1.1中 (X, Y) 之聯合p.d.f.及邊際p.d.f.

$y \setminus x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$f_Y(y)$
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{5}{18}$
2	0	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	0	0	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{18}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

上例中的隨機向量為離散型，因它所有可能的值是可數的(事實上為有限)。對離散型的隨機向量，令

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y),$$

稱為 (X, Y) (或省略括號, 只寫 X, Y)之**聯合機率密度函數**(joint probability density function), 或聯合p.d.f.。有時為了強調是 (X, Y) 之聯合p.d.f., 也可寫成 $f_{X,Y}(x, y)$ 。表1.1給出例1.1中 (X, Y) 之聯合p.d.f.。

如同單變數的情況, 由 (X, Y) 之聯合p.d.f., 可完全決定 (X, Y) 之機率分佈。即對 $\forall A \subset R^2$,

$$(1.1) \quad P((x, y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} f(x, y)。$$

由於 (X, Y) 為一離散型的隨機向量, $f(x, y)$ 只對可數個 (x, y) 才不等於0。所以即使 A 包含不可數個點, 如 R^2 上一長方形, (1.1)式的右側, 只會是一可數個 $f(x, y)$ 的和。例如, 取 $A = \{(x, y) | x = 7, y \leq 4\}$ 。這是 R^2 中一半線, 有不可數個點。但由表1.1知, 在 A 中只有 $(x, y) = (7, 1)$ 或 $(7, 3)$ 才會使 $f(x, y) \neq 0$ 。故

$$P(X = 7, Y \leq 4) = f(7, 1) + f(7, 3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9},$$

如預期的, 與例1.1中所得相同。當求出 (X, Y) 之聯合p.d.f.後, 在求關於 (X, Y) 之機率時, 通常會較回到樣本空間上(如例1.1的作法)去求容易。

對離散型的隨機向量 (X, Y) , 其聯合p.d.f. $f(x, y)$, 要滿足 $f(x, y) \geq 0$, 且存在一可數的集合 $C \subset R^2$, 使得

$$(1.2) \quad \sum_{(x,y) \in C} f(x, y) = 1。$$

反之, 若 $f(x, y)$ 為一由 R^2 至 R 的非負函數, 且只有在一可數的集合 C 才不為0, 並滿足(1.2)式, 必為某一**隨機向量** (X, Y) 之聯合p.d.f.。如同單變數的情況, 這種 (X, Y) 並不唯一。不同的隨機向量, 可以有相同的聯合p.d.f.。

雖然在考慮隨機向量 (X, Y) , 但有時會對其中某一變數有興趣。例如, 我們可能想知道諸如 $X = 3$ 之機率。若 (X, Y) 為一隨機向量, 則 X, Y 分別

4 第三章 多維隨機變數

為隨機變數。對離散的情況，令 $f_X(x) = P(X = x)$, $f_Y(y) = P(Y = y)$ ，分別稱為 X 及 Y 之邊際(marginal)機率密度函數，或說邊際p.d.f.。下述定理給出由聯合p.d.f.來求邊際p.d.f.的方法。

定理 1.1 設有離散型隨機向量 (X, Y) ，以 $f_{X,Y}(x, y)$ 為其聯合p.d.f.。則

$$(1.3) \quad f_X(x) = \sum_{y \in R} f_{X,Y}(x, y),$$

$$(1.4) \quad f_Y(y) = \sum_{x \in R} f_{X,Y}(x, y)。$$

證明.我們只證關於 $f_X(x)$ 的結果，關於 $f_Y(y)$ 的證明類似。對任意 $x \in R$ ，由於事件 $-\infty < Y < \infty$ 之機率為 1，故

$$\begin{aligned} f_X(x) &= P(X = x) \\ &= P(X = x, -\infty < Y < \infty) \\ &= P((X, Y) \in \{(x, y) | -\infty < y < \infty\}) \\ &= \sum_{y \in R} f_{X,Y}(x, y)。 \end{aligned}$$

證畢。

如果 Y 取非負整數值，則 (1.3) 式成為

$$f_X(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{X,Y}(x, j),$$

如果 X 取值在正偶數，則

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(2i, y)。$$

又 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 須滿足

$$(1.5) \quad \sum_{x \in R} f_X(x) = \sum_{x \in R} \sum_{y \in R} f_{X,Y}(x, y) = \sum_{(x,y) \in R^2} f(x, y) = 1,$$

$$(1.6) \quad \sum_{y \in R} f_Y(y) = \sum_{y \in R} \sum_{x \in R} f_{X,Y}(x, y) = \sum_{(x,y) \in R^2} f(x, y) = 1。$$

因只是對所有可能的值相加, 爲了簡便, 常以

$$\sum_x f_X(x), \quad \sum_y f_Y(y), \quad \sum_{x,y} f(x,y)$$

分別取代

$$\sum_{x \in R} f_X(x), \quad \sum_{y \in R} f_Y(y), \quad \sum_{(x,y) \in R^2} f(x,y)。$$

例1.2 利用定理1.1, 可求出例1.1中 X, Y 之邊際p.d.f.:

$$\begin{aligned} f_X(2) &= \sum_{j=0}^5 f_{X,Y}(2, j) = f_{X,Y}(2, 0) = \frac{1}{36}, \\ f_X(3) &= \sum_{j=0}^5 f_{X,Y}(3, j) = f_{X,Y}(3, 1) = \frac{1}{18}, \\ &\vdots \\ f_Y(0) &= \sum_{i=2}^{12} f_{X,Y}(i, 0) = \frac{1}{6}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

我們將 X, Y 之邊際p.d.f. 亦給在表1.1。可驗證

$$\begin{aligned} \sum_x f_X(x) &= \sum_{x=2}^{12} f_X(x) = 1, \\ \sum_y f_Y(y) &= \sum_{y=0}^5 f_Y(y) = 1。 \end{aligned}$$

由 (X, Y) 之聯合p.d.f., 除了知道關於 (X, Y) 之事件的機率, 也可知道僅關於 X , 或僅關於 Y 之事件的機率。

再來我們考慮連續型的隨機向量。一由 R^2 映至 R 的非負函數 $f(x, y)$, 若滿足對 $\forall A \subset R^2$,

$$(1.7) \quad P((X, Y) \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy,$$

便稱為連續型隨機向量 (X, Y) 之聯合p.d.f.。至於 (X, Y) 之邊際p.d.f., 則定義為

$$(1.8) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy, -\infty < x < \infty,$$

$$(1.9) \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx, -\infty < y < \infty。$$

反之, 任一二變數的非負函數 $f(x, y)$, 若滿足

$$(1.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1,$$

必為某一連續型的隨機向量 (X, Y) 之聯合p.d.f.。如果(1.10)式中之 $f(x, y)$ 在一有限的區域, 例如長方形 $[a, b] \times [c, d]$, 其中 $a < b, c < d$, 不為0, 則(1.10)式成為

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = 1。$$

要注意的是, 有時候不同的聯合p.d.f., 會導致相同的邊際p.d.f.。也就是有可能 (X, Y) 與 (U, V) 分佈不同, 但 $X \stackrel{d}{=} U, Y \stackrel{d}{=} V$ 。習題第10題為一例。

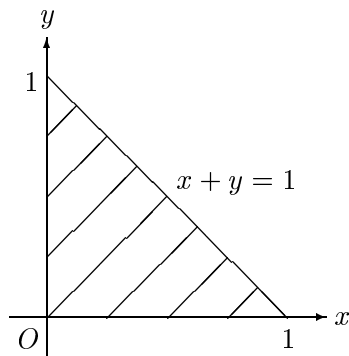
例1.3 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1, \\ 0 & , \text{其他}。 \end{cases}$$

首先要說明的是, 對上述 f , 有時我們只簡單地寫成

$$f(x, y) = 24xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1,$$

並隱含著若不在所給的區域, 則 $f(x, y)$ 皆為0。又上述區域可簡化為 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$, 或 $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y$ 。



我們先驗證 $f(x, y)$ 確為一 p.d.f.:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} 24xy dx dy \\
 &= \int_0^1 12x^2 y \Big|_0^{1-y} dy \\
 &= \int_0^1 12y(1-y)^2 dy \\
 &= 12 \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_0^1 \\
 &= 1 \text{。}
 \end{aligned}$$

其次 X 之邊際 p.d.f. 為

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^{1-x} f(x, y) dy \\
 &= \int_0^{1-x} 24xy dy \\
 &= 12x(1-x)^2, 0 \leq x \leq 1 \text{。}
 \end{aligned}$$

故

$$P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 12x(1-x)^2 dx = \frac{11}{16} \text{。}$$

當然不求邊際 p.d.f., $X \leq 1/2$ 之機率, 亦可由下述積分求得, 答案相同:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-x} 24xy dy dx = \frac{11}{16} \text{。}$$

同理可求出

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} f(x, y) dx = 12y(1-y)^2, 0 \leq y \leq 1。$$

要注意邊際p.d.f.的範圍。原本 x, y 之範圍是互有影響的($x + y \leq 1$), 但 $f_X(x)$ 之 x 的範圍卻不能有 y , $f_Y(y)$ 之 y 的範圍也不能有 x 。

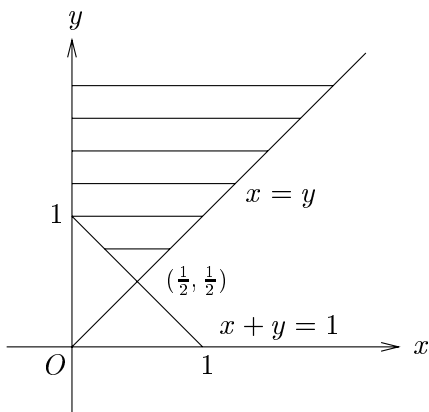
例1.4 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = e^{-y}, 0 < x < y < \infty。$$

雖然表面上看起來 e^{-y} 中不含 x , 但因 $f(x, y)$ 不為0之處: $0 < x < y < \infty$, 與 x 有關, 所以 $f(x, y)$ 仍與 x 有關。事實上若將 $f(x, y)$ 寫成下述型式就較清楚了:

$$f(x, y) = e^{-y} I_{\{0 < x < y < \infty\}}。$$

底下來求事件 $X + Y \geq 1$ 之機率。由下圖看出 $X + Y \leq 1$ 的機率較好求。又因這是連續型的隨機變數, 故 $X + Y \leq 1$ 與 $X + Y < 1$ 之機率相同。



由上述說明得

$$\begin{aligned} P(X + Y \geq 1) &= 1 - P(X + Y < 1) \\ &= 1 - P(X + Y \leq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} e^{-y} dy dx \\
&= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-x} - e^{-(1-x)}) dx \\
&= 2e^{-1/2} - e^{-1}。
\end{aligned}$$

若先對 x 再對 y 積分, 也可求出 $P(X + Y \leq 1)$ 。即

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^y e^{-y} dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-y} e^{-y} dx dy。$$

會得到相同的答案, 只是此時計算稍繁瑣些, 讀者不妨自行練習。

隨機向量之**聯合分佈函數**的定義為:

$$(1.11) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)。$$

對離散型的隨機向量, 聯合分佈函數常沒有簡單的型式, 應用上不是那麼方便。但對連續型的隨機向量, 如同單變數的情況, 若 (X, Y) 之聯合p.d.f.為 $f(x, y)$, 則

$$(1.12) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du。$$

利用兩變數的微積分基本定理, 在每一 $f(x, y)$ 之連續點 (x, y) , 上式導致

$$(1.13) \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)。$$

最後對隨機向量 (X, Y) , 令 $g(x, y)$ 為一實值函數, 則 $g(X, Y)$ 仍為一隨機變數。對離散型及連續型, $g(X, Y)$ 之期望值分別為

$$\begin{aligned}
E(g(X, Y)) &= \sum_{x, y} g(x, y) f(x, y), \\
E(g(X, Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy。
\end{aligned}$$

例1.5 承例1.3。我們有

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} 24x^2 y^2 dx dy \\
 &= \int_0^1 8y^2 (1-y)^3 dy \\
 &= \left(\frac{8}{3} y^3 - 6y^4 + \frac{24}{5} y^5 - \frac{4}{3} y^6 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{8}{3} - 6 + \frac{24}{5} - \frac{4}{3} \\
 &= \frac{2}{15}。
 \end{aligned}$$

另外,

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24x^2 y dx dy = \frac{2}{5}。$$

$E(X)$ 也可利用例1.3中, 所求出的 X 之邊際p.d.f.而得, 即

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 12x^2 (1-x)^2 dx = \frac{2}{5}。$$

答案當然要相同。

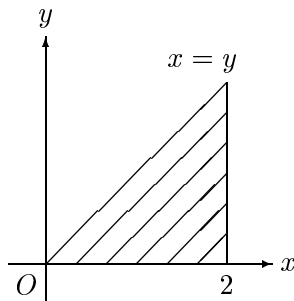
例1.6 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq y \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

試求(i) c 之值, (ii) $P(X \geq Y + 1)$, 及(iii) $P(X > x)$, $x \in R$ 。

解.(i) 由

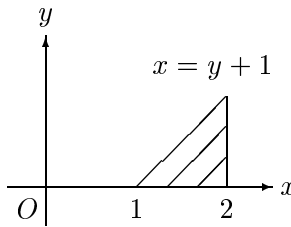
$$\begin{aligned}
 1 &= \int_0^2 \int_0^x f(x, y) dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^x c dy dx \\
 &= \int_0^2 cx dx = 2c。
 \end{aligned}$$



得 $c = 1/2$ 。

(ii)

$$\begin{aligned}
 P(X \geq Y + 1) &= \int_1^2 \int_0^{x-1} \frac{1}{2} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x-1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4}。
 \end{aligned}$$



(iii) 設 $0 < x < 2$ 。則

$$\begin{aligned}
 P(X > x) &= \int_x^2 \int_0^u \frac{1}{2} dy du \\
 &= \int_x^2 \frac{1}{2} u du \\
 &= \frac{1}{4} u^2 \Big|_x^2 = 1 - \frac{1}{4} x^2。
 \end{aligned}$$

至於若 $x \leq 0$, 則 $P(X > x) = 1$, 若 $x \geq 2$, 則 $P(X > x) = 0$ 。