

## 第二章

# 常見分佈

## 2.2 離散型分佈

### 2.2.1 伯努力分佈

在日常生活裡, 有很多我們接觸的隨機現象, 往往恰有兩個可能的結果, 譬如說生男或生女, 考試及格或不及格, 投擲一骰子得到奇數或偶數點, 自一袋中任取一球得到白球或非白球, 某人是否得到某一特定的病, 某股票是否上漲等. 當然這一切, 都可簡化為**成功**(success)及**失敗**(failure)兩種結果. 即在二結果中, 指定一我們有興趣的, 並將之稱為成功, 另一結果則稱為失敗.

假設某隨機現象是可以重覆的, 則每觀察一次這種隨機現象, 便稱為進行一次隨機試驗. 而對一只有兩種可能結果的隨機試驗, 便稱為一**伯努力試驗**(Bernoulli trial). 有時進行一連串的伯努力試驗, 然後數看看其中有幾次成功.

一伯努力試驗中, 被稱為成功的事件, 不一定是我們喜歡的結果, 而是二結果中, 我們較關心或有興趣者. 例如, 我們可能會記錄共有幾次交通事故, 或共有幾人得病等. 則每一次交通事故, 或每有一人得病, 便皆稱為一次成功.

## 2 第二章 常見分佈

在有些較複雜的隨機試驗中，若我們有興趣的是某特定事件的發生與否，則也會產生伯努力試驗。例如，假設觀察患有某病之病人的存活時間 $T$ 。雖然通常 $T$ 取的值超過兩個，但若我們有興趣的為病人是否存活超過5年，則事件 $E = \{T > 5\}$ ，便可稱為成功事件，至於其餘集 $E^c = \{T \leq 5\}$ ，便稱為失敗事件。如此一來，此試驗就可視為一伯努力試驗了。又如，在某次選舉中，有候選人多位，投票情況當然很複雜。但若我們只關心選民是否會投給某特定候選人，則便化為只有二結果，伯努力試驗又出現了。

由以上討論知，伯努力試驗的例子處處可見。而只有兩個可能結果的試驗，可說是最簡單的試驗了（只有一個結果的試驗，只是一種退化的隨機試驗）。計算機裡採用二進位，以0及1，便可表示出所有的數。在隨機世界裡，也可以只有二結果的伯努力試驗，而繁衍出種種的分佈。

伯努力試驗，是因瑞士著名的數學家，機率論創始者之一的James Bernoulli(1654-1705)而得名。而一隨機變數 $X$ 若滿足

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = 1) = p,$$

其中 $0 \leq p \leq 1$ ，便稱為具有參數 $p$ 之**伯努力分佈**(Bernoulli distribution)，以 $Ber(p)$ 表之。可簡便地寫成 $X \sim Ber(p)$ 。又 $X$ 之p.d.f.即為

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0, \\ p, & x = 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分佈函數則為

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

期望值、變異數及拉普拉斯轉換分別為

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p),$$

$$\begin{aligned}\phi(s) &= E(e^{-sX}) = P(X=0)e^{-s \cdot 0} + P(X=1)e^{-s \cdot 1} \\ &= 1-p + pe^{-s}, s \geq 0.\end{aligned}$$

最後可看出 $X$ 之p.d.f.亦可寫成

$$(2.1) \quad f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1.$$

### 2.2.2 二項分佈

有時我們觀測 $n$ 個獨立的伯努力試驗, 每次成功之機率皆設為 $p$ , 又以 $X$ 表總共成功之次數, 若第 $i$ 次之結果以 $Y_i$ 表之,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $Y_i = 1$ 表第 $i$ 次為成功,  $Y_i = 0$ 表失敗, 顯然 $Y_i$ 有 $Ber(p)$ 分佈, 則易見

$$(2.2) \quad X = Y_1 + \dots + Y_n.$$

平常選舉開票時, 往往以劃“正”來計票, 每開出一張票, 若支持某候選人, 便在該候選人名字(或號碼)下, 依序劃一線, 若開出 $n$ 張票, 則該候選人共得的票數, 就是 $Y_1 + \dots + Y_n$ , 其中 $Y_i$ 表第 $i$ 張票的結果(=1或0).

利用排列組合的技巧, 可得

$$(2.3) \quad P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, 1, \dots, n.$$

上式給出 $X$ 的p.d.f., 亦可表為

$$(2.4) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n.$$

一p.d.f.如(2.4)式之隨機變數, 便稱為有參數 $n$ 及 $p$ 之**二項分佈**(binomial distribution), 以 $\mathcal{B}(n, p)$ 表之, 其中 $n$ 為一正整數,  $0 \leq p \leq 1$ . 當然 $Ber(p)$ 即為 $\mathcal{B}(1, p)$ . 通常取 $0 < p < 1$ . 由**二項式定理**(Binomial theorem) 可驗證

$$\sum_{i=0}^n P(X=i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p+1-p)^n = 1.$$

故(2.4)式的確定義出一離散型的分佈.

圖2.1給出 $B(5, 0.5)$ 及 $B(5, 0.2)$ p.d.f.的圖形(直方圖).

**註2.1 二項式定理.** 對任二實數 $a, b$ 及正整數 $n$ ,

$$(2.5) \quad (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

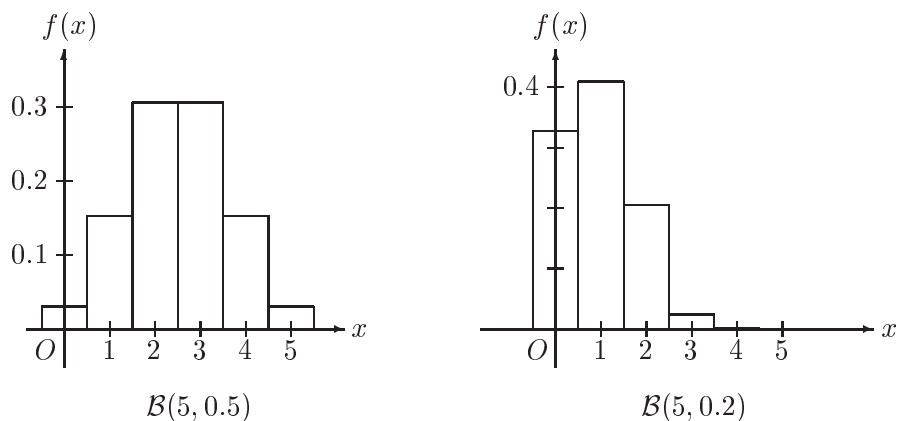


圖2.1  $B(5, 0.5)$ 及 $B(5, 0.2)$ p.d.f.之圖形

因此, 若有一如(2.5)式右側之級數, 則其和等於 $(a + b)^n$ .

要注意的是,  $n, p$ 須固定, 且 $n$ 次伯努力試驗須獨立, 且每次成功的機率皆須相同, 否則其成功次數便不是二項分佈了, 見下例.

**例2.1** 一袋中有100個球, 其中有40個白球. 隨機地取3球, 每次取出後不放回, 令 $X$ 表取出之白球數, 則可如下看出 $X$ 並無二項分佈.

任取一球為白球之機率為0.4, 所以有三個 $Ber(0.4)$ 試驗, 但各次試驗並不獨立. 此因若第1次取中非白球, 則第2次有40/99之機率取中白球; 若第1次取中白球, 則第2次有39/99之機率取中白球. 第2次取中的結果 $Y_2$ 受到第1次的結果 $Y_1$ 之影響,  $Y_1$ 與 $Y_2$ 不獨立. 因此 $X$ 並無二項分佈.

不難看出, 若每次取出球後放回, 則 $X$ 有 $B(3, 0.4)$ 分佈.

二項分佈當 $n$ 較大時, 計算上便有些困難. 例如, 若獨立地投擲一銅

板100次, 每次成功的機率設為 $1/2$ , 總共之正面數 $X$ , 便有 $\mathcal{B}(100, 1/2)$ 分佈, 則 $X = 30$ 之機率為

$$P(X = 30) = \binom{100}{30} \left(\frac{1}{2}\right)^{100},$$

$\binom{100}{30}$ 自然是不太好算的, 儘管如此, 一方面是常遇到, 一方面是由簡單的伯努力試驗出發, 但又不至於過分簡單(伯努力試驗的變化太少), 二項分佈遂成為一重要且基本的分佈.

**例2.2** 投擲一公正的骰子四次, 求

(i) 至少獲得一次點數6之機率;

(ii) 最多獲得兩次點數4或5之機率.

**解.**(i) 令 $X$ 表所得點數6之次數, 則 $X$ 有 $\mathcal{B}(4, 1/6)$ 分佈, 因此

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \doteq 0.518. \end{aligned}$$

(ii) 令 $Y$ 表所獲得點數4或5之次數, 則 $Y$ 有 $\mathcal{B}(4, 1/3)$ 分佈, 因此

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{16}{81} + \frac{32}{81} + \frac{24}{81} \\ &= \frac{72}{81} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

我們分別求 $\mathcal{B}(n, p)$ 分佈之期望值、變異數及拉普拉斯轉換如下:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=1}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^n n \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{y=0}^{n-1} n \binom{n-1}{y} p^{y+1} (1-p)^{n-(y+1)} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \\
&= np.
\end{aligned}$$

此處用到對  $x \geq 1$ ,

$$x \binom{n}{x} = x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} = n \binom{n-1}{x-1},$$

並令  $x-1 = y$  其次

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^n nx \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= n \sum_{y=0}^{n-1} (y+1) \binom{n-1}{y} p^{y+1} (1-p)^{n-1-y} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} y \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \\
&\quad + np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y} \\
&= n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

上式中第四個等號右側第一個和對應  $\mathcal{B}(n-1, p)$  分佈之期望值, 故等於  $(n-1)p$ , 第二個和則用到二項式定理. 故

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= E(e^{-sX}) \\
&= \sum_{x=0}^n e^{-sx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^{-s})^x (1-p)^{n-x} \\
&= (1-p + pe^{-s})^n, s \geq 0.
\end{aligned}$$

我們發現 $\mathcal{B}(n, p)$ 的拉普拉斯轉換, 爲 $\mathcal{Ber}(p)$ 的拉普拉斯轉換的 $n$ 次方. 事實上, 由(2.2)式並利用下一章定理2.3, 便立即得知二者的拉普拉斯轉換, 確實有此關係.

**例2.3** 試利用 $\mathcal{B}(n, p)$ 分佈之拉普拉斯轉換, 求 $E(X)$ 及 $E(X^2)$ .

**解.**由第一章(6.18)式知

$$E(X^n) = (-1)^n \phi^n(0).$$

而

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= -npe^{-s}(1-p+pe^{-s})^{n-1}, \\
\phi''(s) &= npe^{-s}(1-p+pe^{-s})^{n-1} \\
&\quad + n(n-1)p^2e^{-2s}(1-p+pe^{-s})^{n-2}.
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
E(X) &= -\phi'(0) = np(1-p+p)^{n-1} = np, \\
E(X^2) &= \phi''(0) = np + n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

與之前所得相同, 但計算上較快捷.

## 2.2.3 幾何分佈

持續地投擲一出現正面的機率為 $p > 0$ 之銅板，每次的投擲設為獨立，直至出現一正面才停止，總共須投擲幾次？與二項分佈裡不同的是，此處投擲的次數並非固定，運氣好只要投擲一次，運氣不好就可能要投擲很多次了。如果是投擲 $x$ 次停止，則前 $x-1$ 次須皆為反面，最後一次須為正面，而每次出現反面之機率為 $1-p$ ，出現正面之機率為 $p$ 。因此若令 $X$ 表總共須投擲的次數，則

$$(2.6) \quad P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

一p.d.f.如(2.6)式之隨機變數，便稱為有參數 $p$ 之幾何分佈，以 $Ge(p)$ 表之。(2.6)式定義出一幾何級數(即等比級數)，這是此分佈名稱之由來，也易驗證

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

當然如果 $p = 1$ ，則 $X$ 為一退化的隨機變數，且 $P(X = 1) = 1$ 。一般假設 $0 < p < 1$ 。

附帶一提，有時會對反面數 $Y$ 有興趣，即在得到一正面前，究竟白投擲幾次？由於 $Y = X - 1$ ，因此易見

$$(2.7) \quad P(Y = y) = p(1-p)^y, y = 0, 1, \dots$$

有時幾何分佈是指p.d.f.之型式如(2.7)式者，為了區分，可對p.d.f.如(2.6)式者，稱為自1開始之幾何分佈，如(2.7)式者，稱為自0開始之幾何分佈。

幾何分佈就是進行一數列之獨立的伯努力試驗，但次數並未事先固定，而是直至成功一次才停止。這種情況是常可見的，如相親、試驗一新技術及革命等。

圖2.2給出 $Ge(0.1)$ p.d.f.之圖形。

**例2.4** 投擲一公正的骰子，直至出現一6點才停止，則總共投擲的次數 $X$ 便

有  $Ge(1/6)$  分佈.

由(2.6)式即得

$$(2.8) \quad P(X \geq x) = \sum_{i=x}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = (1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \dots,$$

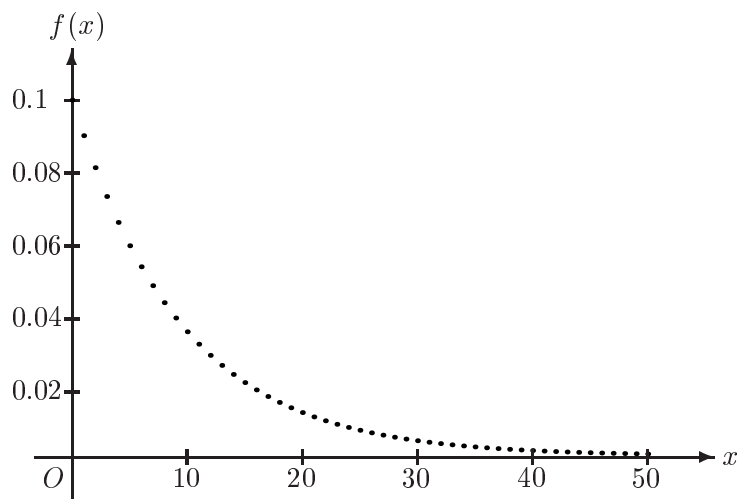


圖2.2  $Ge(0.1)$ p.d.f.之圖形

由此即得分佈函數

$$(2.9) \quad P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x+1) = 1 - (1-p)^x, x = 1, 2, \dots,$$

有一簡單的型式.

我們分別求  $Ge(p)$  分佈之期望值、變異數及拉普拉斯轉換如下.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p (1-p)^{x-1} \\ &= -p \frac{d}{dp} \left( \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \right) = -p \frac{d}{dp} \left( \frac{1-p}{p} \right) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p (1-p)^{x-1}$$

$$\begin{aligned}
&= p \sum_{x=1}^{\infty} (x+1)x(1-p)^{x-1} - p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\
&= p \frac{d^2}{dp^2} \left( \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x+1} \right) - p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\
&= p \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{(1-p)^2}{p} \right) - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

因此

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

又

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= E(e^{-sX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-sx} p(1-p)^{x-1} \\
&= pe^{-s} \sum_{x=1}^{\infty} e^{-s(x-1)} (1-p)^{x-1} \\
&= pe^{-s} \sum_{x=1}^{\infty} ((1-p)e^{-s})^{x-1} \\
&= \frac{pe^{-s}}{1 - (1-p)e^{-s}}, s \geq 0.
\end{aligned}$$

在例2.4中, 平均要投擲6次才會得到第一個6點, 變異數則為

$$\frac{1 - 1/6}{(1/6)^2} = 30,$$

即標準差 =  $\sqrt{30} \doteq 5.477$ (次).

**例2.5** 假設某項考試每年考一次, 每次錄取率為3%. 試問考生平均要考多少年才考的上, 並求其標準差.

**解.** 令  $X$  表所需考的年數, 則  $X$  有  $\mathcal{G}e(0.03)$  分佈. 因此

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{0.03} \doteq 33.33, \\
\sqrt{\text{Var}(X)} &= \sqrt{\frac{1-0.03}{0.03^2}} \doteq 32.83.
\end{aligned}$$

平均約要考33.33年, 相當驚人. 不過標準差也很大, 與期望值相當. 顯示有人可很快考上, 有人則要花很久. 實際情況每位考生程度不一, 有人會輕易

考上, 而且有人考了幾次不上便放棄了.

由幾何分佈變異數的公式知, 當參數 $p$ 較小時, 標準差與期望值, 相對而言便很接近:

$$\frac{\text{標準差}}{\text{期望值}} = \sqrt{1-p}.$$

其他分佈不見得有此現象. 取二項分佈 $\mathcal{B}(n, p)$ 來比較:

$$\frac{\text{標準差}}{\text{期望值}} = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{np} = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}}.$$

即使 $p$ 小些, 視 $n$ 的大小, 此比值可大可小.

**註2.2** 設**冪級數**(power series)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

在 $x \in (a-r, a+r)$ 收斂,  $r > 0$ . 則對 $\forall x \in (a-r, a+r)$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^x g(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}, \\ g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

即冪級數在不含端點之收斂範圍內的積分、微分, 分別為**逐項積分**及**逐項微分**的和.

幾何分佈有一有趣的**無記憶性質**(memoryless property). 即

$$(2.10) \quad P(X > s+t | X > s) = P(X > t), \quad s, t = 1, 2, \dots$$

投擲一銅板, 直至一正面出現才停止. 若已投擲了 $s$ 次皆未出現正面( $X > s$ ), 則再投擲 $t$ 次仍未出現正面( $X > s+t$ )的機率, 與重新投擲 $t$ 次未出現正面( $X > t$ )之機率相同. 換句話說剛才所投擲的 $s$ 次是白工.

(2.10)式之證明並不困難: 由(2.8)式得

$$P(X > x) = P(X \geq x+1) = (1-p)^x, x = 0, 1, 2, \dots.$$

故

$$\begin{aligned} P(X > s+t | X > s) &= \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} \\ &= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} \\ &= (1-p)^t = P(X > t). \end{aligned}$$

得證.

#### 2.2.4 負二項分佈

幾何分佈是執行一數列之獨立的伯努力試驗, 每次成功的機率為  $p$ , 直至得到一成功才停止, 所需試驗次數的分佈. 一個很自然的推廣是, 給定一正整數  $r$ , 持續進行伯努力試驗, 直至  $r$  次成功才停止. 則總共之試驗次數  $X$ , 便稱為有參數  $r$  及  $p$  之**負二項分佈**(negative binomial distribution), 以  $\mathcal{NB}(r, p)$  表之. 一般假設  $0 < p < 1$ . 若  $p = 1$ , 則  $P(X = r) = 1$ . 此分佈有時又稱為**巴斯卡分佈**(Pascal distribution), 因法國數學家 Pascal (1623-1662) 而命名.

若  $X = x$ , 由於最後一次為成功, 且第一次至第  $x-1$  次中, 有  $r-1$  次成功,  $x-r$  次失敗, 故

$$\begin{aligned} (2.11) \quad P(X = x) &= \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \\ &= \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r}, x = r, r+1, \dots. \end{aligned}$$

(2.11)式的確定義出一機率分佈, 其證明要用到下述推廣的二項式定理.

**定理2.1** 對 $\forall c \in R, |x| < 1$ ,

$$(2.12) \quad (1+x)^c = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} x^n.$$

此處對任一實數 $c$ , 定義

$$(2.13) \quad \binom{c}{n} = \frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}, n \geq 1, \binom{c}{0} = 1.$$

又當 $c$ 為一非負整數時, 由(2.13)式得

$$\binom{c}{n} = \frac{c!}{n!(c-n)!}, 0 \leq n \leq c.$$

(2.13)式即推廣 $c$ 不為非負整數時 $\binom{c}{n}$ 的意義. 由(2.13)式可看出, 當 $c$ 為一非負整數時, 對 $\forall n > c$ ,  $\binom{c}{n} = 0$ , 此時(2.12)式之右側成為一有限的級數. 除此情況外(即 $c$ 不為非負整數), (2.12)式之右側皆為一無限級數.

定理2.1, 即將二項式定理推廣到適用任意次方, 此為牛頓(Newton, 1642-1727)在數學的諸多發現中, 相當值得激賞的一件, 為他早期的研究成果之一.

利用定理2.1, 對 $\forall 0 < p < 1, r > 0$ , 可得

$$\begin{aligned} p^{-r} &= (1 - (1-p))^{-r} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-r}{i} (-(1-p))^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-i+1)}{i!} (-1)^i (1-p)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(r+i-1)(r+i-2)\cdots r}{i!} (-1)^i (-1)^i (1-p)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r+i-1}{i} (1-p)^i \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{x-r} (1-p)^{x-r}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{x=r}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{x-r} (1-p)^{x-r} p^r = p^{-r} p^r = 1.$$

即得證(2.11)式的確定義出一機率分佈.

在前述推導中, 用到次方為負之二項式定理, 這是負二項分佈命名的由來.

如果以投擲銅板為例, 二項分佈就是投擲的次數固定, 看其中出現幾次正面, 而負二項分佈則是要求出現的正面數固定, 看需要投擲幾次.

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\text{若 } X \text{ 有 } \mathcal{NB}(r, p) \text{ 分佈, 則對 } \forall x = r, r+1, \dots, \\ &P(X > x) = P(U < r), \end{aligned}$$

其中  $U$  有  $\mathcal{B}(x, p)$  分佈. 此式成立是因  $X > x$ , 若且唯若前  $x$  次伯努力試驗中, 成功次數小於  $r$ . 由(2.14)式得, 對  $\forall x = r, r+1, \dots$ ,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - P(U < r) = 1 - P(U \leq r-1) \\ &= P(U \geq r). \end{aligned}$$

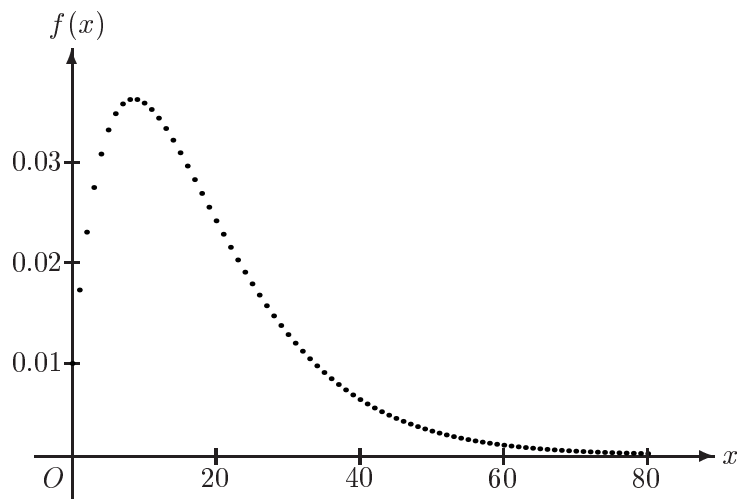
因此負二項分佈的分佈函數, 可經由某一個二項分佈的分佈函數表示出.

在負二項分佈裡, 令  $r = 1$ , 便得幾何分佈. 另外, 設  $X$  有  $\mathcal{NB}(r, p)$  分佈, 令  $Y = X - r$ , 則  $Y$  表得到第  $r$  次成功停止時總共失敗之次數, 且

$$(2.15) \quad \begin{aligned} P(Y=y) &= P(X=r+y) \\ &= \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y, y=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$X$  表總共投擲數, 若只關心停止時之失敗數, 則得隨機變數  $Y$ . 今後除非特別聲明, 如果提到負二項分佈  $\mathcal{NB}(r, p)$ , 我們指其 p.d.f. 如(2.15)式所給的型式.

圖 2.3 給出  $\mathcal{NB}(2, 0.1)$  p.d.f. 之圖形.

圖 2.3  $\mathcal{NB}(2, 0.1)$  p.d.f.之圖形

我們分別求  $\mathcal{NB}(r, p)$  分佈之期望值、變異數及拉普拉斯轉換如下.

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y \\
 &= \sum_{y=1}^{\infty} \frac{(r+y-1)!}{(y-1)!(r-1)!} p^r (1-p)^y \\
 &= \sum_{y=1}^{\infty} r \binom{r+y-1}{y-1} p^r (1-p)^y \\
 &= \sum_{z=0}^{\infty} r \binom{r+z}{z} p^r (1-p)^{z+1} \\
 &= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{(r+1)+z-1}{z} p^{r+1} (1-p)^z \\
 &= \frac{r(1-p)}{p}.
 \end{aligned}$$

此處用到變換  $z = y - 1$ , 及最後一個和為  $\mathcal{NB}(r+1, p)$  分佈之所有機率值的和, 故為 1.

同理可得

$$(2.16) \quad \text{Var}(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2},$$

$$(2.17) \quad E(e^{-sY}) = \frac{p^r}{(1 - (1-p)e^{-s})^r}, s \geq 0.$$

此二式留給讀者自行推導。

### 2.2.5 超幾何分佈

如例2.1顯示，在伯努力試驗中，若每次成功的機率不一樣，則 $n$ 次試驗後，所得成功次數就不是二項分佈了。假設袋中有 $N$ 個球，其中有 $D$ 個白球， $N - D$ 個非白球，自其中隨機地取出 $n$ 個球，每次取出後不放回(without replacement)，令 $X$ 表總共取得之白球數，則

$$(2.18) \quad P(X = x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \max\{0, n - N + D\} \leq x \leq \min\{n, D\}.$$

我們說明 $x$ 之範圍的由來。因只取 $n$ 個球，且白球數共只有 $D$ 個，所以 $x$ 不能超過 $n$ 及 $D$ ，即 $x \leq \min\{n, D\}$ 。又取中之非白球的個數 $n - x$ 當然不能超過全部之非白球數 $N - D$ ，而 $x \geq 0$ 又要成立，因此 $x \geq \max\{0, n - N + D\}$ 。

(2.18)式便定義出一**超幾何分佈**(hypergeometric distribution)，以 $\mathcal{H}(N, D, n)$ 表之，有三個參數。只要是取出後不放回，通常便引出超幾何分佈。因此在諸如民意調查，及**品質管制**(quality control)的討論裡常出現。

**例2.6** 設有 $N = 200$ 個零件，其中有 $D = 4$ 個不良品(不良率為2%)，隨機地取3個樣本(每次取出後不放回)，則樣本中之不良品數 $X$ 有 $\mathcal{H}(200, 4, 3)$ 分佈。因此

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{\binom{4}{0} \binom{200-4}{3-0}}{\binom{200}{3}} = \frac{1,235,780}{1,313,400} \doteq 0.9409, \\ P(X = 1) &= \frac{\binom{4}{1} \binom{200-4}{3-1}}{\binom{200}{3}} = \frac{4 \cdot 19,110}{1,313,400} \doteq 0.0582. \end{aligned}$$

同理可求出

$$\begin{aligned} P(X = 2) &\doteq 0.000895, \\ P(X = 3) &\doteq 3.046 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

此兩機率值可說非常地小。

例2.6給出一種小樣本事件。通常我們做決策要仰賴大樣本，小樣本怎會值得重視？大家都聽過“曾參殺人”的典故吧。在漢朝劉向撰，東漢高誘註的戰國策第四篇(秦策二)：昔者曾子處費，費人有與曾子同名族者，而殺人，人告曾子母曰“曾參殺人”。曾子之母曰“吾子不殺人”，織自若。有頃焉，人又曰“曾參殺人”，其母尚織自若也。頃之，一人又告之曰“曾參殺人”。其母懼，投杼踰牆而走。夫以曾參之賢，與母之信也，而三人疑之，則慈母不能信也。

曾子是孔子的弟子，戰國策記載，以他的賢能及其母對他的信任，但接連三個人告訴其母他殺人，其母對他的信心便動搖了。

如果某公司宣稱其生產之某零件不良率僅2%。有一回你買了一盒有200個，並取出3個使用。若其中壞了一個尚可忍受，因機率約為0.0582(見例2.5)。若壞了兩個，可能便要找公司退貨了(因機率小於千分之一，約為0.000895)。若3個皆壞，大概便不相信不良率才2%而已。有些事件我們原先的認知是不太會發生，偶而碰到一次只是覺得運氣不好。碰到第2次時，心裡便可能覺得怪怪的。若再多碰到一、二次，便很可能覺得要嘛有人搞鬼，要嘛這件事發生的可能性其實不是那麼低。小樣本就是在這類發生的機率很低之情況中，顯現其影響力。戰國策第二十三篇(魏策二)，另有一則“三人市虎”的典故，也是相似的道理：夫市之無虎明矣，然而三人言而成虎。要知有時是可以偏概全的。

在很多實際的情況中，通常 $D$ 較 $n$ ， $N$ 皆小很多，而 $n$ 也比 $N$ 小不少，此時 $x$ 的範圍成為 $0 \leq x \leq n$ 。即使如此要驗證

$$\sum_{x=0}^n P(X=x) = \sum_{x=0}^n \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1,$$

並非易事，但由超幾何分佈的由來，我們知道上式是成立的。

超幾何分佈的期望值與變異數如下：

$$(2.19) \quad E(X) = \frac{nD}{N},$$

$$(2.20) \quad \text{Var}(X) = \frac{nD(N-n)(N-D)}{N^2(N-1)}.$$

不過由其p.d.f.的型式, 很難想像期望值及變異數會如此簡潔. 我們留至3.7節, 再以間接的方法推導. 至於拉普拉斯轉換並無簡單的形式, 因此略去.

### 2.2.6 波松分佈

在二項分佈 $\mathcal{B}(n, p)$ 中, 若 $n$ 很大時會如何? 顯然只要 $p > 0$ 但固定, 則成功次數很可能也會很大(注意, 不論 $n$ 多大, 成功次數均可能會很小). 但若 $n$ 很大且 $p$ 很小, 而 $np$ 卻適當地大, 此時成功次數的分佈會如何? 我們有底下的定理.

**定理2.2** 設隨機變數 $X_n$ 有 $\mathcal{B}(n, p_n)$ 分佈,  $n \geq 1$ , 且滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda, 0 < \lambda < \infty$ , 則

$$(2.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots.$$

**證明.** 首先有

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} (np_n)^k (1 - p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

再由 $n \rightarrow \infty$ 時,

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \longrightarrow 1,$$

$$(np_n)^k \longrightarrow \lambda^k,$$

且

$$(1 - p_n)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda},$$

使得證(2.21)式成立.

**註2.3** 此處用到若 $n \rightarrow \infty$ 時,  $a_n \rightarrow 0$ , 且 $a_n b_n \rightarrow c$ , 其中 $c \in R$ , 則 $n \rightarrow \infty$ 時,  $(1 + a_n)^{b_n} \rightarrow e^c$ , 其中 $e$ 為自然對數的底.

一隨機變數 $X$ , 若其p.d.f.為

$$(2.22) \quad f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ , 便稱有參數 $\lambda$ 之**波松分佈**(Poisson distribution, Poisson(1781-1840)為法國數學家), 以 $\mathcal{P}(\lambda)$ 表之. 由於

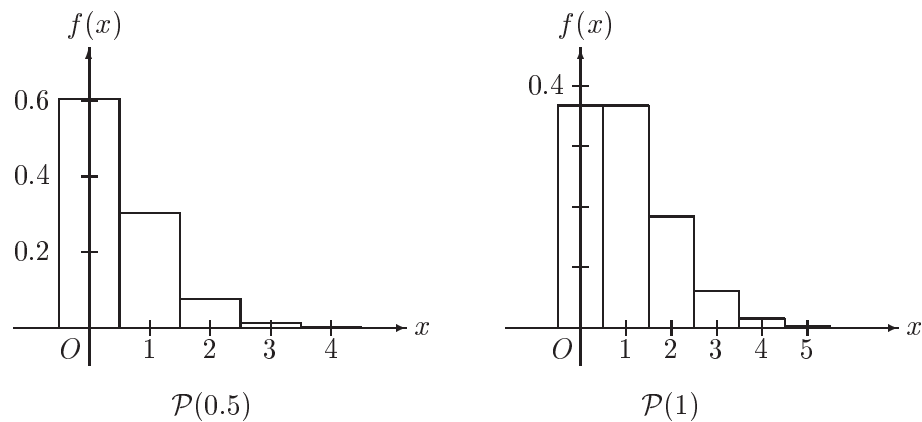
$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

故(2.22)式的確定義出一機率密度函數. 此處用到對 $\forall \lambda \in R$ ,  $e^{\lambda}$ 在0的**泰勒級數**(Taylor's series)為

$$(2.23) \quad e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}, \lambda \in R,$$

這是微積分中一重要的結果.

圖2.4給出幾個不同參數下, 波松分佈p.d.f.之圖形.



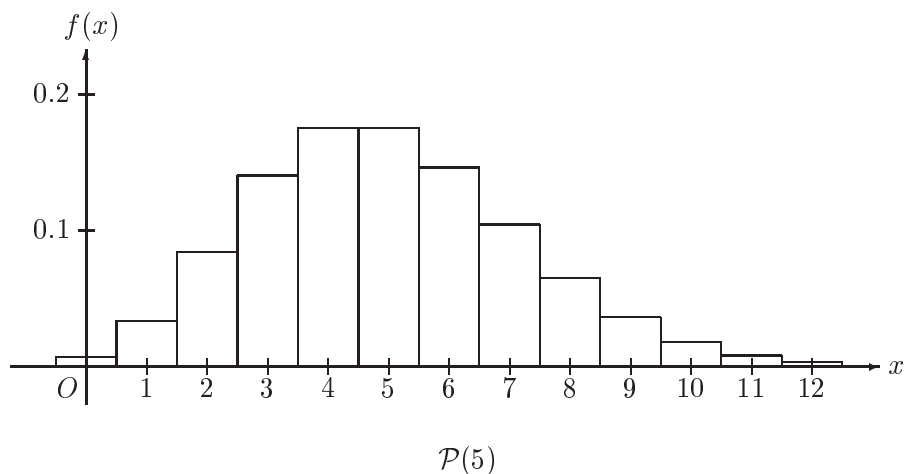


圖2.4 波松分佈p.d.f.之圖形

**例2.7** 設 $X$ 有 $\mathcal{P}(2)$ 分佈,則

$$P(X = 0) = e^{-2} \doteq 0.1353,$$

$$P(X = 1) = 2e^{-2} \doteq 0.2707,$$

$$P(X = 2) = 4e^{-2}/2 \doteq 0.2707,$$

$$P(X = 3) = 8e^{-2}/6 \doteq 0.1804,$$

而

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \doteq 0.594.$$

前面提過, 對二項分佈 $B(n, p)$ , 當 $n$ 較大時, 一般而言, 其機率值並不好算. 即使是數值表, 由於有兩個參數, 針對不同的 $n$ 及 $p$ , 要列出很多表才行. 但波松分佈只有一參數, 且其p.d.f.之極大值發生於 $[\lambda]$  (若 $\lambda$ 不為一正整數), 或 $\lambda - 1$ 及 $\lambda$  (若 $\lambda$ 為一正整數), 其中 $[\lambda]$ 表小於或等於 $\lambda$ 之最大整數. 因此若 $X$ 有 $\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈, 我們往往只需求 $k$ 不太大時之 $P(X = k)$  (因對較大的 $k$ , 此機率值很小), 此時 $k!$ 不難算, 而 $e^{-\lambda}$ 及 $\lambda^k$ 用計算機立刻可算出. 要知次方的計算比二項係數 $\binom{n}{k}$ 容易求, 尤其是 $n$ 較大時 (一般掌上型計算機只能算到69!), 所以 $n$ 很大時, 以波松分佈之機率值來做為二項分佈之機率

值的近似值(即Poisson approximation to the binomial distribution, 常簡稱為**波松近似**), 是有實際的便利. 但所謂 $np$ 要適當地大, 多大才算適當呢? 通常 $np \leq 7$ 時, 波松分佈便對二項分佈提供一很好的近似值. 當然“很好”的標準也因人而異, 如Olkin et al.(1994)p.333, 便認為 $np \leq 20$ 時, 就都不錯. 但 $np$ “過大”就不宜用波松分佈來當做二項分佈之近似.

在給下例之前, 令

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n,$$

$$p(k; \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!, k = 0, 1, \dots,$$

分別表 $\mathcal{B}(n, p)$ 及 $\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈之p.d.f.

**例2.8** 對一有500員工之公司, 令 $X$ 表生日為元旦之員工數, 則可以 $\mathcal{B}(500, 1/365)$ 當做 $X$ 之分佈. 表2.1顯示以參數 $\lambda = 500/365$ 之波松分佈來求 $X$ 之機率值還蠻精確.

表2.1. 以波松分佈做為二項分佈之近似

| $k$                | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $b(k; 500, 1/365)$ | .2537 | .3484 | .2388 | .1089 | .0372 | .0101 | .0023 |
| $p(k; 500/365)$    | .2541 | .3481 | .2385 | .1089 | .0373 | .0102 | .0023 |

**例2.9** 某城市發生了一案件, 警方認為犯案者具有某數項特徵, 又推測任何一人具該數項特徵之機率為 $1/12,000,000$ . 由於該城有 $12,000,000$ 人, 現找到一具該數項特徵者, 警方認為此人就是犯案者. 試問警方之看法是否正確?

**解.** 依警方假設, 該城具該數項特徵之人數 $X$ 有 $\mathcal{B}(12,000,000, 1/12,000,000)$ 分佈, 近似於 $\mathcal{P}(1)$ 分佈. 而

$$\begin{aligned} P(X > 1 | X \geq 1) &= \frac{P(X > 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{1 - P(X = 0) - P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} \\ &\doteq \frac{1 - e^{-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \doteq \frac{0.264}{0.632} \doteq 0.42. \end{aligned}$$

即該城會有另一人亦具有該數項特徵之機率約為0.42. 此機率實不算小, 警方宜再多找證據, 不可冒然結案.

本例取材自Gray(1983), 乃真有其事. 事實上連1/12,000,000的機率之由來都大有問題. 本例顯示欲利用機率做決策時, 要先正確了解機率.

波松分佈為一極重要的離散型分佈. 諸如某段時間內電話打進來的數目, 交通意外事件, 太空中某區域的星球數等, 常可以波松分佈當模式. 這都是因其為二項分佈的極限的原因: 每次試驗成功的機率很低( $p$ 很小), 但試驗次數很多( $n$ 很大), 因此總共的成功數, 便可以波松分佈來描述了, 誤差不致太大.

當 $X$ 有 $\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

期望值與變異數相等, 這是波松分佈一有趣的性質. 拉普拉斯轉換則為

$$\phi(s) = E(e^{-sX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-s})^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{-s}} = e^{-\lambda(1-e^{-s})}, s \geq 0.
\end{aligned}$$

我們給一實際的例子.

**例2.10** 民國90年12月6日, 多家媒體均刊登一如夢的新聞, 中國時報的標題為

夫婦八天內連續抽中六部車

次日中時電子報又有一則標題為

京華驚奇槓上開花 徐家連中7台車

的新聞.

原來台北市京華城生活購物中心, 開幕後為了促銷, 推出“一百名休旅車抽獎活動”. 從11月26日起, 一連十天, 每天送出每輛單價約43萬元的汽車. 購物每滿2,000元就可兌換一張抽獎券. 一對徐姓夫婦(太太是商職數學老師), 在八天內抽中六部, 夫妻倆才在想“是在作夢嗎?” 在最後一天又抽中了一部, 合計共抽中7部車, 價值約300萬元.

依據報載, 這對夫婦共花了三百多萬元, 換來1,543張抽獎券. 本來每天寫八十八張(取“發”“發”的好彩頭)投入抽獎箱, 持續二天後嫌太麻煩, 第三天把抽獎券寫完一口氣投入抽獎箱. 結果竟先後中了7部車. 不少民眾質疑抽獎過程是否有作假? 新聞媒體也好奇是否因88這個特殊的數字帶給他們幸運? 又抽獎券分投在各抽獎箱, 或集中在一箱是否有差異? 早上投一些, 下午投一些, 晚上投一些是否又較有利?

各媒體報導不盡相同. 例如, 有寫他們花三百三十六萬元(如12月7日民視新聞), 有寫他們花四百萬元(如12月6日聯合晚報第7版). 不過前者佔多數. 累積的抽獎券有說超過15萬張(如90年12月6日聯合晚報第7版), 亦有說14萬張(如12月8日東森新聞). 至於逐日累積的抽獎券數, 報導較少, 且不完整.

由於京華城指出每天的抽獎過程均有律師見證，並拍照存證，作假問題應可不用考慮，又是由消費者的手中抽出(90年12月6日中國時報第10版)，再加上抽獎者也不見得是從下層、中層或上層抽出，因此特殊的數字或特殊的投法，並沒有證據顯示會較容易中獎。從機率的角度來看，愈早將所擁有的抽獎券，全投入箱中，愈會提高中獎機率。

雖然我們不知道每天累積的抽獎券數，但猜想京華城也沒有精確地去計算。如果是因抽出汽車而帶動購物風潮，有可能一開始人數較少，例如，第1天有1萬張抽獎券，後來逐漸增加，假若是這樣，第一天徐姓夫婦抽獎券所佔比例約為

$$\frac{88}{10,000} = 0.0088$$

(他們11月23至25日花了兩百多萬，換來888張抽獎券，但抽獎是由11月26日起，因此開始抽獎的第一天，他們在票箱裡的票似應至少有888張)，至於最後所佔比率(如果全部抽獎券為15萬張)

$$\frac{1,537}{150,000} = 0.010247,$$

或(如果全部抽獎券為14萬張)

$$\frac{1,537}{140,000} = 0.010979,$$

其中 $1,537 = 1,543 - 6$ ，因最後一天時，他們已被抽出6張，所以箱內尚有他們的1,537張抽獎券。

對徐姓夫婦，每日之中獎率並不相同，中間會有幾天中獎率較高，最後一天較低。若以 $X$ 表徐姓夫婦總共中的汽車數(即抽出他們的獎券數)，則在所知的資訊下， $X$ 的分佈並無法求出。

我們考慮一簡化後的情況：箱內共有15萬張獎券，徐姓夫婦有1,500張，要自其中抽出100張。由於獎券抽出後並不放回，因此他們所抽中的獎券數 $X$ 有超幾何分佈 $\mathcal{H}(150,000, 1,500, 100)$ ，即

$$P(X = 7) = \frac{\binom{1,500}{7} \binom{148,500}{93}}{\binom{150,000}{100}}.$$

此機率當然是繁瑣地讓人不想嘗試去算它。

因100與150,000比起來很小,不妨假設抽獎券抽出後皆再放回,則每次會抽中這對夫婦之獎券之機率為 $1,500/150,000 = 0.01$ ,而抽100次,在此情況下, $X$ 有二項分佈 $\mathcal{B}(100, 0.01)$ ,再利用波松近似,因 $100 \cdot 0.01 = 1$ ,得 $X$ 有近似的波松分佈 $\mathcal{P}(1)$ ,因此,這對夫婦十天中,至少會中一部車的機率為

$$1 - e^{-1} \doteq 1 - 0.367879 = 0.632121.$$

實在不算小,主要是他們的獎券數相當多,約佔全部的百分之1,即使每日來看(每天抽10部車),每天會被抽中的次數以 $\mathcal{B}(10, 0.01)$ 來估計,則每天至少會中1部汽車的機率(此為)

$$1 - \binom{10}{0} 0.99^{10} \doteq 1 - 0.904 = 0.096.$$

要注意的是,有7天皆中一部車的的機率,並非約為 $(0.096)^7 \doteq 7.514 \cdot 10^{-8}$ ,此為“連續”7天,每天至少中一部車的機率之近似值,與我們所討論的並不同。

前面說過,抽獎是每天抽10部汽車,並非一口氣抽100部,而10天中有幾天,他們的中獎率,可能是超過0.01的,尤其如果總獎券數是14萬張的話,不過我們就考慮100部汽車是最後一天一起抽,且採用波松近似,在不同 $\lambda$ 下,表2.2列出會中的汽車數 $X$ 之機率的近似值。

表2.2  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ,  $P(X = k)$ 之值,  $k = 0, 1, \dots, 7$

| $k \setminus \lambda$ | 1.0     | 1.1     | 1.2     | 1.5     | 1.8     | 2.0     |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0                     | .367879 | .332871 | .301194 | .223130 | .165299 | .135335 |
| 1                     | .367879 | .366158 | .361433 | .334695 | .297538 | .270671 |
| 2                     | .183940 | .201387 | .216860 | .251021 | .267784 | .270671 |
| 3                     | .061313 | .073842 | .086744 | .125511 | .160671 | .180447 |
| 4                     | .015328 | .020307 | .026023 | .047067 | .072302 | .090224 |
| 5                     | .003066 | .004467 | .006246 | .014120 | .026029 | .036089 |
| 6                     | .000511 | .000819 | .001249 | .003530 | .007809 | .012030 |
| 7                     | .000073 | .000129 | .000214 | .000756 | .002008 | .003437 |

如果取 $\lambda = 1.5$ , 則徐姓夫婦會中7部車的機率約為0.000756, 約1,323分之一, 當然是不大, 但卻沒有想像的小, 至於要中至少4部車的機率, 約為

$$1 - 0.223130 - 0.334695 - 0.251021 - 0.125511 = 0.065643,$$

約15分之一, 算是不太難發生, 讀者也可試以 $\lambda = 1.2$ 的波松分佈, 來估計徐姓夫婦所得汽車數之機率, 應不至於太離譜, 在資訊如此不完整的情況下, 波松分佈在此扮演一簡潔而有效的粗略估計角色, 總之, 中7部車的機率雖很小, 但絕不是如0.01的7次方般的小(此約為每天只抽1部車, “連續”7天皆中的機率).

雖然中7部車的機率並不高, 但從新聞的觀點, 只要有一這類幸運發生(也不一定要7部, 只要5部以上大約就有新聞價值了), 並不限京華城, 任何一家百貨公司, 或任何一種抽獎活動(或彩券)皆行, 當然幸運者也不需姓徐, 如此一來發生的機率就更高了, 甚至可說是一必然發生的事件, 可參考黃文璋(1999)一文的例5.

最後, 附帶一提, 如果徐姓夫婦的採購是集中在第1天, 且1,543張抽獎券都在第1天便投入箱中, 又假設全部有150,000張抽獎券, 且每天箱中增加15,000張, 則每日之中獎率依序比下列數列均大

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= 0.1, & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} &= 0.05, & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0333, & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} &= 0.025, \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} &= 0.02, & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0166, & \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0142, \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} &= 0.0125, & \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} &\doteq 0.0111, & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} &= 0.01. \end{aligned}$$

其中第1個 $1/10$ 是由 $1,500/15,000$ 而得, 在此情況下, 第一天會中的車數約有 $B(10, 0.1)$ 分佈, 此處仍以二項分佈取代超幾何分佈, 反正只是要知道約略的機率, 因此會中1, 2, 3, 4部車的機率, 分別約為0.3874, 0.1937, 0.0574, 0.0112, 至於第2天會中1, 2, 3, 4部車的機率, 分別為0.3151, 0.0746, 0.0105, 0.0010, 如此一來有可能前兩天便已中了好幾部汽車了.

### 2.2.7 離散型的均勻分佈

設一袋中有  $N$  張紙牌, 編號分別為 1 至  $N$ . 隨機地取一張紙牌, 令  $X$  表所得之點數, 則顯然

$$P(X = x) = \frac{1}{N}, x = 1, 2, \dots, N.$$

具有這種 p.d.f. 的隨機變數, 便稱有 **離散型的均勻分佈** (discrete uniform distribution), 其中  $N$  為一正整數, 以  $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{U}(1, N)$  表之. 當然亦可有較一般的  $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{U}(N_1, N_2)$  分佈, 即

$$P(X = x) = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}, x = N_1, N_1 + 1, \dots, N_2.$$

其中  $N_1, N_2$  為二整數, 且  $N_1 < N_2$ . 諸如投擲一公正的骰子, 一公正的銅板等, 都會產生離散型的均勻分佈.

若  $X$  有  $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{U}(1, N)$  分佈,

$$E(X) = \sum_{x=1}^N x \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2},$$

且

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^N x^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \cdot \frac{1}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \\ &= \frac{N^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$

$N=6$  對應投擲一公正的骰子之情況,  $E(X)$  及  $\text{Var}(X)$  與第一章例 6.11 所給的相同.

至於  $X$  之拉普拉斯轉換則為

$$\phi(s) = E(e^{-sX}) = \sum_{x=1}^N e^{-sx} \frac{1}{N} = \frac{e^{-s}(1 - e^{-sN})}{N(1 - e^{-s})}, s \geq 0.$$

隨機與均勻，有時會令人感到迷惑，先見底下的例子。

**例2.11** 假設有2個箱子，將2個球分別隨機地放進其中一箱，即每一個球均有 $1/2$ 的機率放進任何一箱中，隨機地放，便對應均勻分佈，因此那一球會放進那一箱，可視為有離散型的均勻分佈，即 $D-U(1, 2)$ 分佈（假想箱子編號為1, 2），而每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

如果是3個球隨機地放進3個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

如果是10個球隨機地放進10個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{10!}{10^{10}} = \frac{3,628,800}{10^{10}} = 0.00036288.$$

此機率可說是非常地小，一般而言， $n$ 個球隨機地放進 $n$ 個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為 $n!/n^n$ ，此值隨著 $n$ 之增大而漸減。

上述現象，可能違反一般人的直觀，不是說均勻分佈嗎？10個球隨機地放進10個箱子中，每個箱子中各恰有一個球，應是最均勻的分配，結果卻是極不容易發生，反而是不均勻的情況，即至少有一箱子中有兩個以上的球很容易發生，機率為

$$1 - 0.000362888 = 0.99963712,$$

此值相當接近1，甚至一箱中有2球，8箱中各有一球，另一空箱的機率為

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{9}{8}\binom{10}{2} \cdot 8!}{10^{10}} = 45 \cdot \frac{10!}{10^{10}},$$

為每箱中各恰有一球的機率之45倍。

令每箱中各恰有一球的機率為 $a$ ，再給一些例子如下：

(a) 1箱中有3球，7箱中各有一球，另2空箱，其機率為 $60a$ 。

(b) 2箱中各有3球，2箱中各有2球，另6空箱，其機率為 $(35/4)a$ 。

(c) 2箱中各有4球, 2箱中各有1球, 另6空箱, 其機率為 $(35/16)a$ .

(d) 1箱中有1球, 1箱中有2球, 1箱中有3球, 1箱中有4球, 另6空箱, 其機率為 $(35/2)a$ .

(e) 1箱中有6球, 1箱中有2球, 2箱中各有1球, 另6空箱, 其機率為 $(7/4)a$ .

(f) 5箱中各有2球, 另5空箱, 其機率為 $(63/8)a$ .

有些看起來很偏頗的事件, 其發生的機率卻比很均勻的事件之機率高. 欲求均勻而不可得, 由此可見. 讀者也可試求恰有 $i$ 個空箱的機率,  $i = 0, 1, \dots, 9$ , 我們列出結果如下:

(i) 0空箱之機率為 $a$ .

(ii) 1空箱之機率為 $45a$ .

(iii) 2空箱之機率為 $(315 + 60)a = 375a$ .

(iv) 3空箱之機率為 $(35 + 420 + 525)a = 980a$ .

(v) 4空箱之機率為 $(21/2 + 525/4 + 175/2 + 525 + 1575/8)a = (7609/8)a$ .

(vi) 5空箱之機率為 $(7/4 + 21 + 35 + 315/4 + 105 + 105 + 63/8)a = (2835/8)a$ .

(vii) 6空箱之機率為 $(1/6 + 7/4 + 7/2 + 35/16 + 21/4 + 35/2 + 35/9 + 35/8 + 35/4)a = (6821/144)a$ .

(viii) 7空箱之機率為 $(1/112 + 1/14 + 1/6 + 1/4 + 1/8 + 1/2 + 5/16 + 5/12)a = (311/168)a$ .

(ix) 8空箱之機率為 $(1/4032 + 1/896 + 1/336 + 1/192 + 1/320)a = (511/40320)a$ .

(x) 9空箱之機率為 $a/9!$ .

可驗證其和為1. 從有1個空箱, 至有7個空箱, 皆比全無空箱容易發生的多. 最容易發生的是3空箱, 再來依序是4空箱、2空箱、5空箱、1空箱與6空箱的機會差不多, 0空箱與7空箱的機會差不多, 8空箱與9空箱則相對難很多. 老師上課點學生上台, 每次均隨機地點, 一學期下來, 就是有幾位學生被點不只一次, 有幾位學生從未被點過.

上天對每一個人可能無意有差別待遇，但結果是抱怨禍不單行者不少，慶幸好事連連者也不少。紐約911的驚爆慘案剛過， $9+1+1=11$ ，好事者找出許多該慘案中不少與11有關的事件，如班機號碼，乘客人數等。隨即又有11月12日260人死亡的墜機事件，也許飛機失事總是難免，但為何又是紐約，並且發生在11月，11又出現了，日期也只比11多1天，而為12日。這些看似神奇的巧合，很可能都只是均勻分佈下的結果。

在紅樓夢的第八回，賈寶玉去探望薛寶釵，正在閒聊。一語未了，忽聽外面的人說：『林姑娘來了。』話猶未完，黛玉已搖搖擺擺的進來，一見寶玉，便笑道：『哎喲！我來的不巧了！』寶玉等忙起身讓坐。寶釵笑道：『這是怎麼說？』黛玉道：『早知他來，我就不來了。』寶釵道：『這是什麼意思？』黛玉道：『什麼意思呢？來呢，一齊來，不來，一個也不來。今兒他來，明兒我來，間錯開了來，豈不天天有人來呢？也不至太冷落，也不至太熱鬧。姐姐有什麼不解的呢？』

這種不均勻的現象，紅樓夢的作者曹雪芹也早已留意到。有興趣的讀者，可參考黃文璋(1999)一文。

最後，空箱數的期望值為

$$(2.24) \quad \sum_{i=0}^9 iP(i \text{ 空箱}) = 0 \cdot a + 1 \cdot 45a + \cdots + 9 \cdot \frac{1}{9!}a.$$

此值似乎介於3與4之間，但要化簡看起來不是很容易。有沒有較快速的方法呢？此問題我們留至3.7節再回答。

在上例中，對一特定的箱子，譬如說第一個箱子，其中會放進多少個球，有 $B(10, 1/10)$ 分佈。若將 $n$ 個球隨機地放進 $n$ 個箱子中，則一特定箱子中的球數，以 $X_n$ 表之， $X_n$ 便有 $B(n, 1/n)$ 分佈。由定理2.2知， $n$ 很大時， $X_n$ 便有近似的 $\mathcal{P}(1)$ 分佈。

另外，球數與箱子數也可不一樣。例如，可考慮有 $n$ 個球放進 $m$ 個箱子。底下為一隨機選取卻產生不均勻結果之實例。

**例2.12** 臺灣銀行於民國88年12月起開始發行公益彩券，每月1期，至90年

11月發行最後1期，共24期(91年1月起由台北銀行發行新的彩券)。此彩券除了可於購買當場得知立即獎外，每期並有一個七位數號碼的幸運獎。表2.3列出總共24期的幸運獎中獎號碼。表2.4給出全部24期彩券幸運獎中獎號碼末一位數碼之出現頻率。

公益彩券幸運獎中獎號碼的產生是隨機的，即0, 1, 至9每個數字出現的機率均為 $1/10$ ，24期平均來說，每個數字應出現2.4次。但事實上5出現高達5次，而1和8也各有4次，9卻一次都沒有，此亦為一不均勻的事件。我們甚至發現末二位數碼為61者出現3次。但由00至99，共100組末二位數碼，每一組末二位數碼出現的機率只為 $1/100$ 。每一組末二位數碼，在24期中平均出現0.24次(相當於將24個球隨機地放進100個箱子中)。而末三位數碼出現961者有2次，但由000至999每一組末三位數碼出現的機率只

表2.3 24期彩券幸運獎中獎號碼

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 第01期: 1713967 | 第02期: 2063558 | 第03期: 2758361 |
| 第04期: 2147101 | 第05期: 2531455 | 第06期: 3439961 |
| 第07期: 2720834 | 第08期: 2903973 | 第09期: 3928257 |
| 第10期: 2863350 | 第11期: 1018308 | 第12期: 2465872 |
| 第13期: 3912735 | 第14期: 2366961 | 第15期: 1864038 |
| 第16期: 2009334 | 第17期: 3293166 | 第18期: 1915637 |
| 第19期: 3926458 | 第20期: 1957275 | 第21期: 2638735 |
| 第22期: 3262172 | 第23期: 2207285 | 第24期: 2377790 |

表2.4 24期彩券幸運獎中獎號碼末一位數碼之出現頻率

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 末一位數碼 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 合計 |
| 出現頻率  | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 5 | 1 | 3 | 4 | 0 | 24 |

為 $1/1,000$ 。如果再仔細觀察，末二位數碼為34, 35, 38者，也各出現二次。顯

然很多巧合事件，其發生的頻率，的確高於我們直觀上所認為該有的頻率。

我們再給一彩券之例。

**例2.13** 民國91年1月起，台北銀行發行公益彩券，其中“樂透彩”採42取6的玩法，即自1至42的號碼中，選出六個下注(不可重覆)，只要六個號碼全中即為頭獎，與開出的號碼順序無關。又另外開一特別號，中五碼及特別號為貳獎，中五碼為參獎，中四碼為肆獎，中三碼為普獎。每期提撥之總獎金，為當期銷售總金額的56%(一張樂透彩券賣50元)。普獎獎金每張200元，在普獎的獎金分配完後，將剩餘的獎金以38%，12%，15%，35% 分到頭獎、貳獎、參獎、肆獎。頭獎至肆獎，若有數人同中某獎項，則均分該獎之獎金。

(i) 各獎之中獎機率如下：

$$\text{頭獎: } \frac{1}{\binom{42}{6}} = \frac{1}{5,245,786} \doteq 0.00000019,$$

$$\text{貳獎: } \frac{\binom{6}{5}}{\binom{42}{6}} = \frac{6}{5,245,786} \doteq 0.000001143,$$

$$\text{參獎: } \frac{\binom{6}{5} \binom{35}{1}}{\binom{42}{6}} = \frac{210}{5,245,786} \doteq 0.000040032,$$

$$\text{肆獎: } \frac{\binom{6}{4} \binom{36}{2}}{\binom{42}{6}} = \frac{9,450}{5,245,786} \doteq 0.001801445,$$

$$\text{普獎: } \frac{\binom{6}{3} \binom{36}{3}}{\binom{42}{6}} = \frac{142,800}{5,245,786} \doteq 0.02722185.$$

(ii) 其他一些相關機率如下：

$$\text{恰中兩個號碼: } \frac{\binom{6}{2} \binom{36}{4}}{\binom{42}{6}} = \frac{883,575}{5,245,786} \doteq 0.168435197,$$

$$\text{恰中一個號碼: } \frac{\binom{6}{1} \binom{36}{5}}{\binom{42}{6}} = \frac{2,261,952}{5,245,786} \doteq 0.431194105,$$

$$\text{六個號碼都不中: } \frac{\binom{36}{6}}{\binom{42}{6}} = \frac{1,947,792}{5,245,786} \doteq 0.371306035,$$

$$\text{中大樂透之頭獎(49選6): } \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13,983,816} \doteq 0.000000071,$$

$$\text{中小樂透之頭獎}(31\text{選}5): \frac{1}{\binom{31}{5}} = \frac{1}{169,911} \doteq 0.000005885.$$

(iii) 設某期共賣出樂透彩 $a$ 張, 則當期各獎總獎金的期望值如下:

$$\text{頭獎總獎金: } 0.38a(28 - \frac{28,560,000}{5,245,786}) \doteq 8.571139395a,$$

$$\text{貳獎總獎金: } 0.12a(28 - \frac{28,560,000}{5,245,786}) \doteq 2.706675598a,$$

$$\text{參獎總獎金: } 0.15a(28 - \frac{28,560,000}{5,245,786}) \doteq 3.383344498a,$$

$$\text{肆獎總獎金: } 0.35a(28 - \frac{28,560,000}{5,245,786}) \doteq 7.894470495a,$$

$$\text{普獎總獎金: } 200 \cdot \frac{142,800}{5,245,786}a = 5.444370014a.$$

(iv) 設某期樂透彩銷售總金額為 $b$ 元, 則當期各獎總獎金的(近似)期望值如下:

$$\text{頭獎總金額: } 0.171422787b,$$

$$\text{貳獎總金額: } 0.054133511b,$$

$$\text{參獎總金額: } 0.067666889b,$$

$$\text{肆獎總金額: } 0.157889409b,$$

$$\text{普獎總金額: } 0.1088874b.$$

(v) 第一期樂透彩銷售總金額為776,273,750元, 即共賣出15,525,475張, 依上述公式, 估計出各獎之獲獎張數及總獎金如下.

$$\text{頭獎} 2.95 \text{張, 總獎金} 133,071,010 \text{元},$$

$$\text{貳獎} 17.75 \text{張, 總獎金} 42,022,424 \text{元},$$

$$\text{參獎} 621.51 \text{張, 總獎金} 52,528,030 \text{元},$$

$$\text{肆獎} 27,968.30 \text{張, 總獎金} 122,565,404 \text{元},$$

$$\text{普獎} 422,632.15 \text{張, 總獎金} 84,526,430 \text{元}.$$

實際開出各獎之獲獎張數及總獎金如下:

$$\text{頭獎} 0 \text{張, 總獎金} 136,345,482 \text{元},$$

貳獎6張, 總獎金43,056,468元,

參獎338張, 總獎金53,820,585元,

肆獎20,014張, 總獎金125,581,365元,

普獎379,547張, 總獎金75,909,400元.

提撥之總獎金: 434,713,300元.

**註2.4** (i) 普獎獎金總額以總獎金之50%為上限, 以保障大獎中獎人之獎金不至於太低, 不過這是很難發生的, 因為普獎總獎金的期望值, 佔提撥總獎金之比率約為

$$\frac{0.1088874b}{0.56b} \doteq 19.44417\%,$$

遠小於50%.

(ii) 若某期某一獎項無人獲得, 則該獎之獎金移至下期同一獎項, 最多累積5期. 若連續5期無人獲獎時, 則累積之獎金併入次期之總獎金中, 再加上普獎總獎金並未固定, 因此實際上每期頭獎至肆獎之總獎金是有波動的, 並不固定佔該期銷售總金額之若干比率.

(iii) 由於並不計開出的6個號碼之順序, 故可開出號碼的組合共有

$$\binom{42}{6} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{6!} = 5,245,786(\text{組}).$$

如果是一排6個空格, 每空格要自1至42中, 任選一號碼來填寫, 順序對才算中獎, 則總共的可能性, 便有 $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37$ 組.

(iv) 頭獎中獎機率為 $\binom{42}{6}^{-1}$ , 而非 $\binom{42}{6}^{-1} \cdot \binom{42}{6}^{-1}$ . 後者是開出一組特定的號碼, 如 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 而你也剛好選此組號碼之機率.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 至 $\{37, 38, 39, 40, 41, 42\}$ , 總共有 $\binom{42}{6}$ 組, 若你剛好選中開出的那組便中獎, 並不限選中 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 才中獎, 因此中頭獎之機率仍為 $\binom{42}{6} \cdot \binom{42}{6}^{-1} \cdot \binom{42}{6}^{-1} = \binom{42}{6}^{-1}$ .

(v) 貳獎為中五個號碼(有 $\binom{6}{5}$ 組), 且另一碼沒有選擇只能與特別碼一樣, 因此最多可以有 $\binom{6}{5}$ 組.

(vi) 參獎為中五個號碼(有 $\binom{6}{5}$ 組), 且另一碼不能與特別號一樣(否則就是貳獎了), 可自剩餘的 $42 - 6 - 1 = 35$ 碼中任選一碼, 因此最多可以有 $\binom{6}{5}\binom{35}{1}$ 組.

(vii) 肆獎為中四個號碼(有 $\binom{6}{4}$ 組), 另二碼可自剩餘的 $42 - 6 = 36$ 碼(包含特別號)中任選二碼, 因此最多可以有 $\binom{6}{4}\binom{36}{2}$ 組. 同理可得普獎最多可以有 $\binom{6}{3}\binom{36}{3}$ 組. 當然實際上不見得每組號碼都有人投注, 就像頭獎也不見得有人獲得.

(viii) 普獎之中獎機率為 $\binom{6}{3}\binom{36}{3}/\binom{42}{6}$ , 而非 $1/\binom{42}{3} = 1/11,480 \doteq 0.0000871$ . 後者是自42個號碼中任挑3個之中獎機率. 普獎之中獎機率比此機率大多了.

(ix) 六個號碼都不中, 比恰中一個號碼還難.