

第一章

基本概念

1.5 變數代換

在很多試驗裡, 對一隨機變數 X , 有時我們可能會對 X 之某一函數有興趣. 譬如說量測得到圓的半徑 X , 但我們想知道圓的面積 $Y = \pi X^2$. 即使不論實務上的需要, 在1.3節我們已指出, 在數學裡我們常會討論與一變數有關的函數之性質或行為. 由樣本空間 Ω 的引出隨機變數即為一例. 對一隨機變數 X , 有時我們會想知道它的一個函數 $Y = g(X)$ 的行為. Y 便稱為 X 之變數代換(change of variable). 而由 X 至 $Y = g(X)$, 也可視為一種隨機變數之轉換(transformation of a random variable). Y 仍為一隨機變數. 通常 X 的分佈知道, 而因 Y 的值是由 X 的值所決定, 故 Y 的分佈, 可由所給之 X 的分佈來決定.

對每一實數的子集合 A ,

$$(5.1) \quad P(Y \in A) = P(g(X) \in A) = P(X \in g^{-1}(A)).$$

在此

$$g^{-1}(A) = \{x | x \in R, g(x) \in A\}.$$

2 第一章 基本概念

對於新的隨機變數 Y , 由(5.1)式, 欲求 Y 落在某一集合 A 之機率, 仍要回到關於 X 的機率, 但若我們求出 Y 的分佈函數(或機率密度函數), 當然就可以不用理會 X 了.

若 X 為離散型的隨機變數, 則 $Y = g(X)$ 的機率密度函數, 只要留意由 X 至 Y 的變換是否為1-1(等價於 g 是否為嚴格單調函數), 則藉由(5.1)式, 通常可很快地得到, 底下為一典型的例子.

例5.1 設 X 為一離散型的隨機變數, 且p.d.f.為

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.15 & , x = 0, 3, \\ 0.20 & , x = 1, 2, \\ 0.30 & , x = 4, \\ 0 & , \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $Z = (X - 2)^2$. 我們分別來決定 Y 及 Z 之分佈.

首先 X 之可能的值為0, 1, 2, 3, 4, Y 之可能的值則為0, 1, 4, 9, 16. 因 X 只取非負的值, 故由 X 至 Y 的變換為1-1(雖 $g(x) = x^2$, $x \in R$, 並非嚴格單調函數, 但在 $x \geq 0$ 處, g 為嚴格單調). 又

$$P(Y = y) = P(X^2 = y) = P(X = \sqrt{y}), y = 0, 1, 4, 9, 16.$$

故得 Y 之p.d.f.為

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} 0.15 & , y = 0, \\ 0.20 & , y = 1, \\ 0.20 & , y = 4, \\ 0.15 & , y = 9, \\ 0.30 & , y = 16, \\ 0 & , \text{其他.} \end{cases}$$

可驗證 $\sum_y f_Y(y)$ 仍等於1.

其次 Z 之可能的值為0, 1, 4. $X = 0$ 及4, 皆對應 $Z = 4$; $X = 1$ 及3, 皆對應 $Z = 1$; $X = 2$, 則對應 $Z = 0$. 故由 X 至 Z , 並非1-1的變換.

Z 之p.d.f.爲

$$f_Z(z) = P(Z = z) = \begin{cases} f_X(2) = 0.20 & , z = 0, \\ f_X(1) + f_X(3) = 0.35 & , z = 1, \\ f_X(0) + f_X(4) = 0.45 & , z = 4. \end{cases}$$

可驗證 $\sum_z f_Z(z)$ 仍等於1.

底下再給一例.

例5.2 設隨機變數 X 之p.d.f. 爲

$$f(x) = \frac{1}{31} 2^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

令 $Y = X^2 + 1$. 此爲由 X 至 Y 之 1-1 變換, $X = \sqrt{Y-1}$. Y 取值在 1, 2, 5, 10, 17. 故 Y 之p.d.f. 爲

$$f_Y(y) = \frac{1}{31} 2^{4-\sqrt{y-1}}, y = 1, 2, 5, 10, 17.$$

其次令 $Z = g(X) = X^3 - 3X^2 + X + 2$. 則因

$$g(0) = 2, \quad g(1) = 1, \quad g(2) = 0, \quad g(3) = 5, \quad g(4) = 22,$$

故此仍爲由 X 至 Z 之 1-1 變換. 雖不易給出 $X = g^{-1}(Z)$ 之 g^{-1} 的型式, 但仍可寫出 Z 之p.d.f. 如下:

$$\begin{aligned} f_Z(0) &= P(X = 2) = \frac{4}{31}, \\ f_Z(1) &= P(X = 1) = \frac{8}{31}, \\ f_Z(2) &= P(X = 0) = \frac{16}{31}, \\ f_Z(5) &= P(X = 3) = \frac{2}{31}, \\ f_Z(22) &= P(X = 4) = \frac{1}{31}. \end{aligned}$$

要知所謂函數, 只要每一定義域中的元素, 在對應域中恰有一元素與其對應即可, 不一定要能給出一個適用定義域中每一元素的型式(如上

述 X 或 Y 之p.d.f.之對應).

其次我們給二連續型隨機變數的例子.

例5.3 設隨機變數 X 有 $\mathcal{U}(0,1)$ 分佈. 即其p.d.f.為

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

分佈函數為

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

令 $Y = -\lambda^{-1} \log(1 - X)$, 其中 $\lambda > 0$ 為一常數. 又除非特別標出底, 機率與統計裡出現的對數符號 $\log$, 均為自然對數, 即以 e 為底. 此為一由 X 至 Y 之1-1變換. 由於 X 介於 $0, 1$ 之間, 故 Y 取值在 $(0, \infty)$. 則對 $\forall y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-\lambda^{-1} \log(1 - X) \leq y) \\ &= P(\log(1 - X) \geq -\lambda y) \\ &= P(X \leq 1 - e^{-\lambda y}) \\ &= 1 - e^{-\lambda y}, y > 0. \end{aligned}$$

因此 Y 之機率密度函數為

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

即 Y 有**指數分佈**(exponential distribution), 參數為 λ , 以 $\mathcal{E}(\lambda)$ 表之. 上節例4.15中之 X 便是有 $\mathcal{E}(1)$ 分佈.

例5.4 設隨機變數 X 之p.d.f.為

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, x > 0.$$

令 $Y = 1/X$, 則此為一由 X 至 Y 之 $1-1$ 變換, 且 Y 取值在 $(0, \infty)$. 我們想決定 Y 之 p.d.f.

對 $\forall y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(1/X \leq y) \\ &= P(X \geq 1/y) = P(X > 1/y) \\ &= 1 - P(X \leq 1/y) \\ &= 1 - F_X(1/y). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} \\ &= \frac{2}{\pi(1+1/y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} \\ &= \frac{2}{\pi(1+y^2)}, y > 0. \end{aligned}$$

由於 X 與 Y 之 p.d.f. 相同, 故 X 與 Y 有相同的分佈, 即 $X \stackrel{d}{=} Y$. 對此特別的分佈, 雖經過一倒數的變換, 所得之新隨機變數, 其分佈卻未改變.

在上述推導中, 由於只是要求 Y 之 p.d.f., 所以我們並未將 $F_Y(y)$ 明確地寫出. 事實上

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 1 - F_X(1/y) \\ &= 1 - \int_0^{1/y} f_X(x) dx \\ &= 1 - \int_0^{1/y} \frac{2}{\pi(1+x^2)} dx \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arctan x \Big|_0^{1/y} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{y}\right), y > 0. \end{aligned}$$

將此 $F_Y(y)$ 對 y 微分, 便得到前述 $f_Y(y)$, $y > 0$.

在例 5.4 中, p.d.f. 取值在 $x > 0$ 處. 如果想利用此 p.d.f. 定義出一偶函

數, 且仍爲一p.d.f., 就要將一半的份量, 移至 $x < 0$ 之處, 如此才仍爲一p.d.f. 又定義 $f(0)$, 使 f 成爲一連續函數.

即可令

$$(5.2) \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in R.$$

此必仍爲一p.d.f. (習題第1題). 具有型如(5.2)式之p.d.f.者, 稱爲有標準的**柯西分佈** (Cauchy distribution, Cauchy(1789-1857)爲著名的法國數學家), 以 $C(0, 1)$ 表之. 現設隨機變數 X 有 $C(0, 1)$ 分佈, 令 $Y = 1/X$. 雖 X 之p.d.f.的定義域包含 $x = 0$, 因此 Y 之定義似有問題, 但因 $P(X = 0) = 0$, 所以此情況不用擔心. 仿例5.4的作法, 仍可得到 Y 有 $C(0, 1)$ 分佈.

另外, 在例5.4的推導過程中, 有

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

即 Y 之p.d.f., 可將 X 之p.d.f.中的參數 x , 以 $1/y$ 取代, 再乘上 $1/y$ 對 y 微分的絕對值. 而由 $Y = g(X) = 1/X$, 解出

$$X = g^{-1}(Y) = \frac{1}{Y}.$$

故 $f_Y(y)$ 可寫成

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|.$$

上述這些討論與觀察, 便引出底下兩個一般的定理.

定理5.1 設隨機變數 X 之分佈函數爲 F_X , 機率密度函數爲 f_X . 令 $Y = g(X)$, Y 之分佈函數以 F_Y 表之. 又令

$$(5.3) \quad \Omega_1 = \{x | f_X(x) > 0\},$$

$$(5.4) \quad \Omega_2 = \{y | \text{存在 } x \in \Omega_1, \text{ 使得 } y = g(x)\}.$$

(i) 若 g 在 Ω_1 爲嚴格漸增函數, 則 $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$, $\forall y \in \Omega_2$;

(ii) 若 g 在 Ω_1 為嚴格漸減函數, 則 $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)-), \forall y \in \Omega_2$.

我們先說明一下 Ω_1 表 X 之機率密度函數取正值處. 這種集合稱為分佈之**支撐**(support). 例如, 對 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈, 支撐為區間 $(0, 1)$, 對 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈, 支撐為 $(0, \infty)$. 另外對一函數 F ,

$$F(x-) = \lim_{t \uparrow x} F(t),$$

表 F 在 x 之**左極限值**. 當然如果 F 在 x 為左連續, 則 $F(x-) = F(x)$. 同理可定義**右極限** $F(x+)$. 只是若 F 為分佈函數, 因其為右連續, 故 $F(x+) = F(x)$, $\forall x \in R$. 附帶一提, 利用左極限的符號, 可得對 $a < b$,

$$P(a < X < b) = F(b-) - F(a),$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-),$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-).$$

定理5.1之證明

(i) 設 g 在 Ω_1 為嚴格漸增. 則

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_X(g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

(ii) 設 g 在 Ω_1 為嚴格漸減. 則

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \geq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(g^{-1}(y)-). \end{aligned}$$

證畢.

定理5.1適用連續及離離散型的隨機變數. 當 Y 之機率密度函數為連續,

則利用定理5.1, 可由微分分佈函數而得. 我們列成一定理.

定理5.2 設隨機變數 X 之p.d.f.為 f_X . 令 $Y = g(X)$, 其中 g 為一嚴格單調函數, Ω_1 及 Ω_2 分別定義在(5.3)及(5.4)式中. 設 f_X 在 Ω_1 連續, 且 g^{-1} 在 Ω_2 有一連續的導數, 則 Y 之p.d.f.為

$$(5.5) \quad f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, y \in \Omega_2,$$

且 $f_Y(y) = 0, y \notin \Omega_2$.

例5.5 設 X 有 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈. 令 $Y = \sqrt{X}$, 則 $\Omega_1 = \Omega_2 = (0, \infty)$, 且 X 之p.d.f. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$, 在 Ω_1 中連續; $g^{-1}(y) = y^2$ 在 Ω_2 之導數 $2y$ 為連續. 故 Y 之p.d.f.為

$$f_Y(y) = f(y^2) \cdot 2y = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, y > 0.$$

Y 稱為具有參數 λ 之**瑞萊分佈**(Rayleigh distribution).

例5.6 設隨機變數 X 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈. 令 $Y = X/(1 - X)$. 試決定 Y 之p.d.f.及分佈函數.

解. 由 $y = x/(1 - x)$, 知 $\Omega_2 = (0, \infty)$. 又解出

$$x = 1 - \frac{1}{y+1},$$

故 X 至 Y 的變換為 $1 - 1/(y+1)$. 又

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

因此 Y 之p.d.f.為

$$f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}, y > 0.$$

由此又得

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{(t+1)^2} dt = -\frac{1}{t+1} \Big|_0^y = 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y}{y+1}, y > 0.$$

當然 Y 之分佈函數亦可如下直接求出：

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X/(1-X) \leq y) \\ &= P(X \leq y/(y+1)) = \frac{y}{y+1}, y > 0, \end{aligned}$$

其中最後一等式成立，是因 $P(X \leq x) = x, \forall x \in (0, 1)$ 。求出 $F_Y(y)$ 後，經由對 y 微分，便得到 $f_Y(y)$ ，與前述作法所得相同。

在上例中， $\Omega_1 = (0, 1)$ ， $\Omega_2 = (0, \infty)$ 。但有時爲了簡便，我們不特別寫 Ω_1, Ω_2 ，如只寫 $0 < x < 1, y > 0$ （或 $0 < y < \infty$ ）。又在做變數代換時，若一開始給的變換是 $X = h(Y)$ ，其中 h 爲一個1-1函數，則此 h 便相當於前述 g^{-1} 。因此

$$(5.6) \quad f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{d}{dy} h(y) \right|, y \in \Omega_2,$$

其中 Ω_2 爲所求出之 y 的支撐。

在做變數代換時，函數 g 有時不爲嚴格單調，因此定理5.2就不適用。但往往會有 g 在一個個的集合中，分別爲嚴格單調（想想諸如多項函數、正弦及餘弦函數的圖形），因此在每一個集合中，皆可解出 $X = g^{-1}(Y)$ ，則仍有辦法求出 Y 之分佈。如果 g 不是在一個個的集合爲嚴格單調的話，自然就不易求出 Y 的分佈了。先給一例子。

例5.7 設 X 爲一連續型的隨機變數，令 $Y = X^2$ 。則對 $\forall y > 0$ ， Y 之分佈函數爲

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

此處用到 X 爲連續型，所以 $P(X < -\sqrt{y}) = P(X \leq -\sqrt{y})$ 。

現若 X 之 p.d.f. 存在, 則

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

我們發現 Y 之 p.d.f. 為兩項之和, 分別對應區間 $[0, \infty)$ 及 $(-\infty, 0)$. $y = g(x) = x^2$ 在前者有反函數 $x = \sqrt{y}$, 在後者有反函數 $x = -\sqrt{y}$.

定理 5.1 推廣如下:

假設 Ω_1 可寫成有限個不相交集之聯集, 譬如說 $D_0, D_1, D_2, \dots, D_k$, 其中 $P(X \in D_0) = 0$, D_0 可能是一空集合, 使得 $y = g(x)$ 在由每一 D_i 至 Ω_2 皆為 1-1 之對應, $i = 1, 2, \dots, k$, 則 $\forall y \in \Omega_2$, 在 D_i 中恰有一 x_i 與 y 對應, $i = 1, 2, \dots, k$. 因此即有 k 個反函數 $g_1^{-1}(y), \dots, g_k^{-1}(y)$. 又設 $g_i^{-1}(y)$ 在 Ω_2 有一連續的導數, 則 Y 之 p.d.f. 為

$$(5.7) \quad f_Y(y) = \sum_{i=1}^k f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|, y \in \Omega_2,$$

且 $f_Y(y) = 0, y \notin \Omega_2$.

重做例 5.7. $g(x) = x^2$ 在 $[0, \infty)$ 有反函數 $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$, 在 $(-\infty, 0)$ 有反函數 $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$. 故由 (5.7) 式, 直接可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}).$$

對一分佈函數, 我們定義其**分位函數**(quantile function, 有時也稱**反函數**(inverse function), 但與一般反函數的定義不同)如下:

$$F^{-1}(x) = \inf\{t | t \in R \text{ 且 } F(t) \geq x\}, x \in (0, 1).$$

若一隨機變數 X 以 F 為分佈函數, 則 F^{-1} 可同時稱為 X 及 F 之分位函數. 即使 F 不一定是連續, 也不一定嚴格漸增, F^{-1} 必定存在. 但若 F 為連續, 且嚴格漸增, 則 $F^{-1}(x)$ 等於滿足 $F(t) = x$ 之唯一的 t . 此時 F^{-1} 與一般反函數的意義相同. 所以此處 F^{-1} 乃擴充反函數之定義.

對 $\forall p \in (0, 1)$, 令 $x_p = F^{-1}(p)$, 則 x_p 稱為此分佈之**第 p 分位數**(p th-quantile), 或**第 $100p$ 百分位數**($100p$ th-percentile). 特別地 $x_{0.25}$ 稱為**下四分位數**(lower quartile), $x_{0.75}$ 稱為**上四分位數**(upper quartile). 有些書分位數的定義與我們略有不同, 不過這些本書不擬多討論. 我們先給 F^{-1} 的一些基本性質, 證明則留在習題.

定理5.3 設 F^{-1} 為分佈函數 F 之分位函數.

- (i) 對 $\forall x, t \in R$, $F^{-1}(x) \leq t$, 若且唯若 $x \leq F(t)$;
- (ii) F^{-1} 為非漸減且左連續的函數;
- (iii) 若 F 為連續函數, 則 $F(F^{-1}(x)) = x, \forall x \in (0, 1)$.

雖然 F 為連續函數時, $F(F^{-1}(x)) = x$, 但在 F 的連續點 x , $F^{-1}(F(x))$ 卻不一定等於 x , 在 F^{-1} 的連續點 x , $F(F^{-1}(x))$ 也不一定等於 x . 見底下例5.9.

底下給兩個例子.

例5.8 設隨機變數 X 有 $\mathcal{E}(1)$ 分佈. 則 $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$. F 之圖形如圖4.12所給. 由於在 $x > 0$ 處, F 為嚴格漸增, 故 F^{-1} 即 F 之反函數. 經由解 $F(t) = 1 - e^{-t} = x$, 得 $t = F^{-1}(x) = -\log(1 - x)$. F^{-1} 之圖形給在圖5.1. 注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F^{-1}(x) = \infty$. 讀者也可回頭看例5.3, 猜測該例中的 Y 是如何設出來的.

F 之0.5分位數為 $-\log(1/2) = \log 2$, 下四分位數為 $-\log(3/4) = \log(4/3)$, 上四分位數為 $-\log(1/4) = \log 4$.

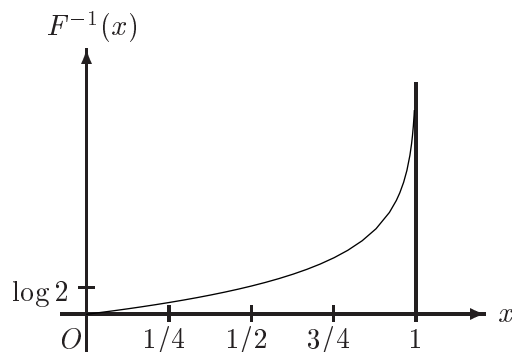


圖5.1 $F^{-1}(x) = -\log(1-x)$ 之圖形

例5.9 設有分佈函數

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ 0.5x & , 0 \leq x < 1, \\ 0.5 & , 1 \leq x < 2, \\ 0.2x + 0.2 & , 2 \leq x < 4, \\ 1 & , x \geq 4. \end{cases}$$

則在 $x \in (0, 0.5]$, 解 $F(t) = 0.5t = x$, 得 $t = F^{-1}(x) = 2x$; 在 $x \in (0.5, 0.6]$, $t = F^{-1}(x) = 2$; 在 $x \in (0.6, 1]$, 解 $F(t) = 0.2t + 0.2 = x$, 得 $t = F^{-1}(x) = 5x - 1$. 分位函數通常不定義在 $x = 0$ 及 $x = 1$, 不過在本例中, $F^{-1}(1) = 4$ 有定義. F 之 0.3 分位數為 0.6, 0.5 分位數為 1, 0.55 分位數為 2, 0.6 分位數亦為 2. $F(t)$ 在 $t = 1.5$ 連續, 但 $F^{-1}(F(1.5)) = F^{-1}(0.5) = 1 \neq 1.5$.

又 $F^{-1}(x)$ 在 $x = 0.55$ 連續, 但

$$F(F^{-1}(0.55)) = F(2) = 0.6 \neq 0.55.$$

F 及 F^{-1} 之圖形如圖 5.2.

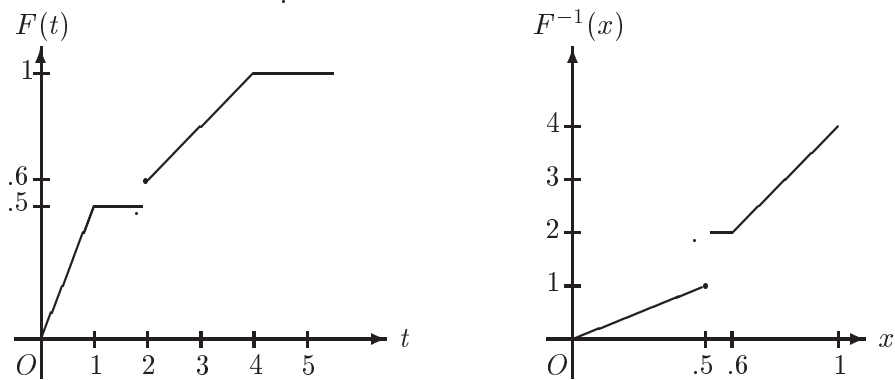


圖 5.2 例 5.9 中 F 及 F^{-1} 之圖形

由例 5.9 可看出, 當 F 之圖形在某區間為嚴格漸增, 則對應的 F^{-1} 亦為嚴格漸增; 當 F 之圖形在某區間為水平, 則對應的 F^{-1} 有跳升; 而當 F 有跳升

時, 則對應一段水平的 F^{-1} . 讀者可想想, F^{-1} 之圖形, 與一般的反函數圖形有何差別.

如果隨機變數 X 之支撐包含負值, 則 F^{-1} 便亦包含負值(見習題第18題). 底下圖5.3之左圖為一有較多段水平及跳升之 F 的圖形. 讀者可練習看出其 F^{-1} 的圖形, 便如圖5.3中之右圖.

給一分佈函數 F , 利用其分位函數 F^{-1} 及一有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈的隨機變數, 可得一以 F 為分佈函數之隨機變數, 此過程即所謂**分位轉換**(quantile transformation).

定理5.4 設 F 為一分佈函數, 且隨機變數 U 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈. 則 $X = F^{-1}(U)$

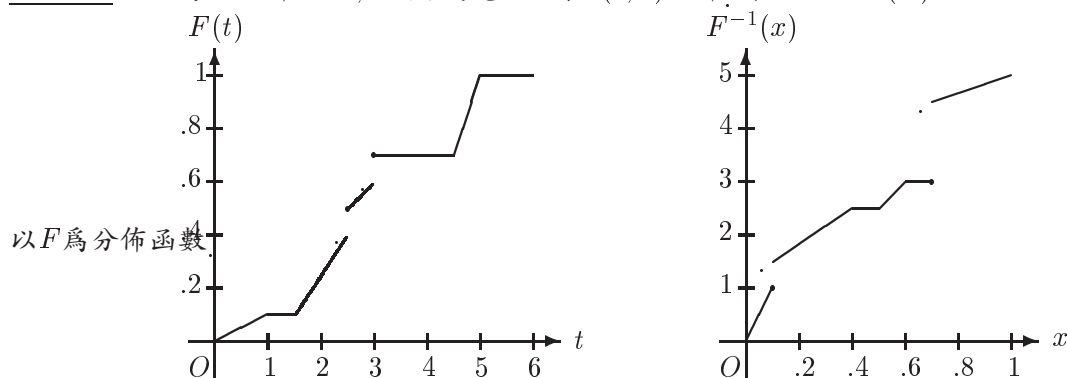


圖5.3 F 及 F^{-1} 之圖形

證明. 首先 $F^{-1}(U)$ 仍為一隨機變數. 利用定理5.3之(i), 對 $\forall t \in R$,

$$P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t).$$

此處用到 $0 \leq F(t) \leq 1$, 而 U 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈, 故最後一等式成立. 證畢.

上述定理為許多模擬步驟之基礎. 計算機裡有產生**隨機數**(random number)的功能, 可製造出獨立的有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈之數列. 因此, 若將 F^{-1} 在前述所產生的數列取值, 便可得到以 F 為分佈函數之隨機數列. 當然, 欲此法可行, 就須先能得 F^{-1} 之**明確的形式**(closed form), 或數值上的近似值.

當 F 為連續時(不一定有p.d.f.存在), 定理5.4有下述逆定理.

定理5.5 設隨機變數 X 之分佈函數 F 為連續, 則 $Y = F(X)$ 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈.

證明. 對 $\forall x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq x) &= P(F(X) \geq x) = P(F^{-1}(x) \leq X) \\ &= 1 - F(F^{-1}(x)) = 1 - x, \end{aligned}$$

其中第一個等式用到定理5.3之(i), 第二個等式是利用假設 F 為連續(若 F 不一定連續, 則 $P(F(X) \geq x) = 1 - F(F^{-1}(x)-)$), 而最後一等式是用到定理5.3之(iii) 故得對 $\forall x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(F(X) \leq x) = P(F(X) < x) \\ &= 1 - P(F(X) \geq x) = 1 - (1 - x) = x, \end{aligned}$$

又顯然 $P(F(X) \leq x) = 0$, 當 $x \leq 0$; $P(F(X) \leq x) = 1$, 當 $x \geq 1$. 故得證 $F(X)$ 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈.

底下給二例.

例5.10 設隨機變數 X 之分佈函數為 $F(x) = x^3$, $0 < x < 1$. 令 $Y = F(X) = X^3$. 底下我們驗證 Y 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X^3 \leq y) \\ &= P(0 < X \leq y^{1/3}) \\ &= F(y^{1/3}) \\ &= (y^{1/3})^3 = y, 0 < y < 1. \end{aligned}$$

故 Y 確實有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈.

例5.11 設隨機變數 X 有標準的羅吉斯分佈, 即分佈函數

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}.$$

底下驗證 $Y = F(X)$ 有 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈.

$$\begin{aligned}P(Y \leq y) &= P\left(\frac{1}{1 + e^{-X}} \leq y\right) \\&= P(1 + e^{-X} \geq y^{-1}) \\&= P(-X \geq \log(y^{-1} - 1)) \\&= P(X \leq -\log(y^{-1} - 1)) \\&= F(-\log(y^{-1} - 1)) \\&= \frac{1}{1 + e^{-(\log(y^{-1} - 1))}} \\&= \frac{1}{1 + (y^{-1} - 1)} \\&= y, 0 < y < 1.\end{aligned}$$

得證.