

第一章

基本概念

1.2 條件機率與獨立性

在上節中，我們在一樣本空間上定義機率。有時得到一些資訊，則根據所獲得的資訊，要修訂樣本空間，因而機率空間可能也會改變。這就是所謂**條件機率**(conditional probability)。

在數學裡不會有這種情況。給定某個數是2，它就一直是2。在機率裡，某事件的機率是有可能因情況而變。這本來是不奇怪的，但因大部分的人受數學的薰陶較久，而數學裡通常是處理“不變”的問題，所以在學習機率時，看到機率值居然會改變，便不易理解。

假設生男生女的機率各為 $1/2$ 。則隨機抽取一個學生會是男或女的機率也就大約是 $1/2$ 。但若知此學生是高雄女中的學生，則會是女生的機率就是1了，因高雄女中沒有收男學生。由於獲得資訊，機率隨之而變，其實是合理的，否則就失去收集資訊的目的。受機率的訓練，會使我們具有隨機的概念，對事物的研判，便能與時推移。

定義2.1 設 A, B 為樣本空間 Ω 中二事件，且 $P(B) > 0$ 。則在給定 B 發生之

2 第一章 基本概念

下, A 之條件機率, 以 $P(A|B)$ 表之, 定義為

$$(2.1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}。$$

在條件機率的定義中, B 成為新的樣本空間: $P(B|B) = 1$ 。也就是原先的樣本空間 Ω 修正為 B 。所有事件發生之機率, 都要先將其針對與 B 的關係做修正。例如, 若 A 與 B 為互斥事件, 且 $P(B) > 0$, 則因 $P(A \cap B) = 0$, 故 $P(A|B) = 0$; 若 $P(A)$ 亦為正, 則此時亦有 $P(B|A) = 0$ 。

例2.1 在例1.14中, 我們看到在梭哈遊戲裡, 要拿到四條的機率很低。但若發了三張牌, 皆拿到 K , 則此時會拿到四條之機率為何?

解. 令 B 表事件發三張牌皆為 K , A 表拿到四條的事件。則 $A \cap B = \{ \text{首三張皆為 } K, \text{ 第四、五張有一張 } K, \text{ 一張非 } K \}$, 且

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} \cdot \frac{48}{\binom{49}{2}},$$
$$P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}。$$

因此

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{48}{\binom{49}{2}} = \frac{2}{49}。$$

機率提高很多。

條件機率也可用來求非條件下的機率。由(2.1)式得

$$(2.2) \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B)。$$

故若知道 $P(A|B)$ 及 $P(B)$, 則可得到 $P(A \cap B)$ 。當然亦有

$$(2.3) \quad P(A \cap B) = P(B|A)P(A),$$

只要 $P(A) > 0$ 。結合(2.2)與(2.3)式, 得

$$(2.4) \quad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}。$$

今後即使不特別聲明，上式要成立就隱含著 $P(A)$ 及 $P(B)$ 皆為正。

(2.4)式為貝氏定理(Bayes' Rule)之一特例，這是英國牧師Thomas Bayes(1702-1761)首先提出，因而命名。不過也有人認為法國的大數學家拉普拉斯(Laplace, 1749-1827)才是第一位明確給出此定理者，所以應稱為拉普拉斯公式(Laplace's formula)。

定理2.1 設 $A_1, A_2, \dots$ 為某樣本空間之一分割。則對任一事件 B ,

$$(2.5) \quad P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)。$$

定理2.2 貝氏定理. 設 $A_1, A_2, \dots$ 為樣本空間之一分割，則對任意 $i \geq 1$ 及任一事件 B ，只要 $P(B) > 0$,

$$(2.6) \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}。$$

例2.2 有甲、乙、丙三囚犯，國王以抽籤決定釋放其中一位，處決另兩位。然後他告訴獄卒那一位將被釋放，但要求獄卒不可先透露。甲先是要求獄卒告訴他那一位會被釋放，遭到拒絕後，改為問獄卒，乙、丙中那一位會被處決。獄卒經過一番思考，遂(誠實地)告訴甲，乙會遭處決。他認為這樣做並未違反國王的規定，原因為：

乙、丙二人，至少有一會遭處決，因此他並未提供甲有關甲是否會被釋放的有用資訊。

甲聽到獄卒說乙會被處決後很高興。原先他只知道自己有 $1/3$ 的機會遭釋放，現因只剩他與丙了，所以他會被釋放的機會提高至 $1/2$ 。

究竟獄卒與甲誰的分析，何者才是正確的呢？

解.令 A, B, C 分別表甲、乙、丙三人會被釋放的事件。如果我們考慮的結果是誰會被釋放，則 $A \cup B \cup C$ 就是樣本空間。由假設 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ 。令 K 表獄卒說乙會被處決的事件。必須先了解的是，若乙、丙皆會被處決，獄卒其實是任意挑一位告訴甲誰會被處決。而若乙將

4 第一章 基本概念

被釋放，獄卒只能告訴甲，丙會被處決，若丙將被釋放，獄卒只能告訴甲，乙會被處決。我們想求 $P(A|K)$ 。首先由貝氏定理：

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|A)P(A) + P(K|B)P(B) + P(K|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(A|K) &= \frac{P(\text{獄卒說乙會被處決, 且甲被釋放})}{P(K)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}。 \end{aligned}$$

換句話說，在獄卒告訴甲，乙會被處決後，甲會被釋放的機會(即 $P(A|K)$)仍維持為 $1/3$ 。那獄卒所提供的資訊是否毫無用處呢？那倒未必。假設丙偷聽到獄卒與甲的對話，則他知道他會被釋放的機會(即 $P(C|K)$)提高至 $2/3$ 。而若乙偷聽到獄卒與甲的對話，則便知沒有活命的機會了(即 $P(B|K) = 0$)。

最後， K 的機率為 $1/2$ ，直觀上是對的，這點讓各位自行想一想。

上例顯示對條件機率，必須要謹慎處理，否則極易犯錯。另外，我們也注意到原先 $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ ，而 $P(A|K) + P(B|K) + P(C|K)$ 亦仍為 1 。這是對的，在習題裡(第18題)我們會給更一般的情況。

其次我們來看**獨立性**(independence)。在機率論裡，獨立是一很重要的概念。不過這種獨立的概念，是所謂**統計的獨立**(statistically independent)，或稱**隨機的獨立**(stochastically independent)，與日常生活裡的主權獨立，金雞獨立等的意義不同。獨立性也是數學裡難以找到與其對應之一種概念。

定義2.2 二事件 A, B ，稱為**相互獨立**(mutually independent, 簡稱**獨立**)，若滿足

$$(2.7) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)。$$

上述定義是如何產生的呢？在討論條件機率時，有時事件 A 之發生，對事件 B 之發生的機率沒有影響。即

$$(2.8) \quad P(B|A) = P(B)。$$

又由(2.4)式得

$$(2.9) \quad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = P(A),$$

亦即此時 B 之發生對 A 也沒有影響。再由(2.2)式，即得(2.7)式成立。在(2.8)及(2.9)二式中，分別要有 $P(A)$ ，及 $P(A)$ 與 $P(B)$ 為正的條件。不過(2.7)式對 $P(A)$ 或 $P(B)$ 為0(此時(2.7)式左、右均為0)仍成立。我們也就以(2.7)式當做 A, B 獨立的條件。當 $P(A) > 0$ 時，(2.7)與(2.8)二式等價，但採用(2.7)式的好處是將二事件 A 與 B 對稱地對待，且較易推廣到超過兩個事件獨立的情況(見底下定義2.3)。

當事件 A 與 B 獨立時，由 B 之發生，對事件 A 得不到任何**推論**(inference)。因此直觀上 A 與 B 獨立，會導致 A 與 B^c 獨立。事實上有下述定理。

定理2.3 設 A 與 B 獨立，則 A 與 B^c ， A^c 與 B ， A^c 與 B^c 皆獨立。

有些事件的獨立與否較易判斷。底下 Ω 表樣本空間， A, B 表事件，讀者可練習判斷(i)至(vi)中，所給的二事件，那些是獨立。

- (i) A 與 $\emptyset$ ， (ii) A 與 Ω ， (iii) A 與 A ， (iv) A 與 A^c ，
- (v) A 與 B ，其中 $A \subset B$ ， (vi) A 與 B ，其中 $A \cap B = \emptyset$ 。

不過有時二事件並不易判斷是否為獨立。如在例2.2，因

$$P(K \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(K)P(A),$$

故 K 與 A 獨立。但 K 與 B ， K 與 C 皆不獨立。再給一例如下。

例2.3 投擲一公正的骰子兩次，則樣本空間為

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\},$$

6 第一章 基本概念

共包含36個元素，其中 (i, j) 表第一次出現點數 i ，第二次出現點數 j 。取 σ -體為包含 Ω 所有子集合之集合(共有 2^{36} 個元素)。令 A 表兩次投擲出現的點數相同， B 表兩次投擲點數和介於7與10間， C 表兩次投擲點數和為2,7或8。則可求出

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\ P(B) &= \frac{6+5+4+3}{36} = \frac{1}{2}, \\ P(C) &= \frac{1+6+5}{36} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(\text{出現}(4, 4)) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C), \\ P(A \cap B) &= P(\text{出現}(4, 4) \text{或}(5, 5)) = \frac{2}{36} \neq P(A)P(B), \\ P(B \cap C) &= P(\text{點數和為}7 \text{或}8) = \frac{6+5}{36} \neq P(B)P(C), \\ P(A \cap C) &= P(\text{出現}(1, 1) \text{或}(4, 4)) = \frac{2}{36} = P(A)P(C). \end{aligned}$$

因此 A 與 B ， B 與 C 均不獨立，但 A 與 C 獨立。

本例不但顯示 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ，不一定導致 A, B, C 中任二獨立，而且二事件獨立與否，有時並不易看出。

定義2.3 對 $n \geq 2$ ，事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，若滿足 A_i 與 A_j 獨立， $\forall i \neq j$ ，則為**每對獨立**，或稱**兩兩獨立**(pairwise independent)；若對所有 $k \geq 2$ ，及 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ，滿足

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}),$$

則為**相互獨立**(仍簡稱獨立)。

由定義2.3可得下述推論，其證明留在習題中。

系理2.1 設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為相互獨立，則對所有 $k \geq 2$ ，及 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ， $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ 為相互獨立；特別地 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為每對

獨立。

由定義2.3得, 三事件 A, B, C 要相互獨立, 就須有

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C),$$

且

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)。$$

即要驗證四個等式成立。一般而言, n 個事件要相互獨立, 就須有

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$$

個等式成立。

當 A, B, C 相互獨立時, 因 $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, 故

$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A)P(B \cap C),$$

即 A 與 $B \cap C$ 亦獨立。反之, 若 A 與 $B \cap C$ 不獨立, 則 A, B, C 便不相互獨立。

例2.4 設樣本空間 Ω 包含 a, b, c 三字母之六個排列, 及 $(a, a, a), (b, b, b), (c, c, c)$ 等共九個元素, 每一元素之機率均設為 $1/9$ 。令事件 A_k 表 Ω 中一元素 (x, y, z) 之第 k 個位置為 a , $k = 1, 2, 3$, 如 $A_1 = \{(a, b, c), (a, c, b), (a, a, a)\}$ 。顯然

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9}。$$

因此 A_1, A_2, A_3 為每對獨立。但因

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

8 第一章 基本概念

故 A_1, A_2, A_3 不相互獨立。

事實上若 A_1, A_2 均發生，則 A_3 必發生，所以 A_3 與 $A_1 \cap A_2$ 不獨立，因此 A_1, A_2, A_3 不相互獨立。

上例顯示雖相互獨立導致每對獨立，但每對獨立並不一定導致相互獨立。

例2.5 考慮投擲一銅板三次的試驗。令“正正反”表頭兩次出現正面，第三次出現反面，餘類推。則樣本空間為

$$\Omega = \{\text{正正正, 正正反, 正反正, 反正正, 正反反, 反正反, 反反正, 反反反}\}。$$

對每一樣本點給定機率 $1/8$ 。又令 A_i 表第 i 次投擲得到正面之事件。則

$$P(A_1) = P(\{\text{正正正, 正正反, 正反正, 正反反}\}) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}。$$

同理 $P(A_2) = P(A_3) = 1/2$ 。即每次投擲會得到正面之機率皆為 $1/2$ 。換句話說，此為一公正的銅板。底下我們來驗證，對此機率模型，事件 A_1, A_2, A_3 為相互獨立：

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(\{\text{正正正}\}) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3), \\ P(A_1 \cap A_2) &= P(\{\text{正正正, 正正反}\}) = \frac{2}{8} = P(A_1)P(A_2)。 \end{aligned}$$

同理可得 $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ 。因此 A_1, A_2, A_3 相互獨立。

讀者可自行驗證，若欲使 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$ ，且 A_1, A_2, A_3 相互獨立，則每一樣本點之機率皆須為 $1/8$ 。但若僅是 A_1, A_2, A_3 相互獨立，則 $P(A_1), P(A_2)$ 及 $P(A_3)$ 便不須皆為 $1/2$ ；而也可有 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$ ，但 A_1, A_2, A_3 不相互獨立的情況（習題第27題）。

例2.6 假設生男與生女的機率均為 $1/2$ 。若一家庭中有兩個小孩，已知其中之一為男孩，試求另一為女孩之機率。

解.令事件 A, B 分別表兩個小孩為一男一女，及有一小孩為男孩之事件。則

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{3}{4}。$$

因此

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3。$$

對二事件 A, B ，有時我們以 $P(A, B)$ 表 $P(A \cap B)$ ，即以逗號“，”取代交集符號“ $\cap$ ”。

例2.7 在上例中，若亦知該男孩為老大，試回答同樣的問題。

解.令事件 C 表老大為男孩。則

$$P(A \cap C) = P(\text{老大為男孩, 老二為女孩}) = \frac{1}{4},$$

$$P(C) = \frac{1}{2}。$$

因此

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}。$$

比較上二例，我們發現，知道一家庭中，兩個孩子之一為男孩，跟知道該男孩亦為老大，對另一小孩性別之判斷，會得到不同的結果。這是條件

機率奧妙之處：有時以為沒有用的資訊其實卻是有用的。總之，正確地利用所得之資訊是很重要的。