

第一章

基本概念

1.1 機率空間

統計的工作是對**隨機現象**(random phenomenon, 一事先不能預知結果的現象)做分析與推論。由於是處理隨機的模型, 其理論基礎便是**機率論**。而機率論乃是建立在**集合論**(set theory)的基礎。

一**隨機試驗**(random experiment), 其所有可能的**結果**(outcome)之集合, 稱為**樣本空間**(sample space), 通常以希臘字母 Ω 表之。機率空間中的一個**元素**, 便稱為一個**樣本**, 通常以 Ω 的小寫 ω 表之。

例如, 投擲一銅板一次, 觀察所得的結果。這便是一隨機試驗, 可能的結果有正面及反面。因此樣本空間為

$$\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}。$$

又如觀測某城市一年之車禍次數, 則 Ω 可取成非負整數之集合, 即

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}。$$

如果是考慮某種電池的壽命, 則

$$\Omega = [0, \infty)。$$

2 第一章 基本概念

依照樣本空間元素的個數，可將其分為**可數的**(countable)及**不可數的**(uncountable)兩類。所謂可數的，是指有限，或無限但與正整數的集合有1-1(一對一)且映成的對應。樣本空間為一集合，反過來，任一非空的集合，皆可視為一樣本空間。另外，樣本空間中的每一元素稱為一**樣本點**(sample point)。

一旦樣本空間決定了，我們便可以考慮**事件**(event)。所謂事件就是試驗之一些可能的結果之集合。亦即樣本空間 Ω 的任一子集合皆為事件。例如，投擲一骰子一次，觀測所得之點數，則 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，且共有 $64(= 2^6)$ 個事件。空集合 $\emptyset$ 以及 Ω 本身，皆為事件。

在此對二集合 A, B ， $A \subset B$ 讀做 **A 包含於 B** ，即若 $x \in A$ ，則 $x \in B$ ，其中符號“ $\in$ ”表**屬於**。可以下述符號來說明：

$$“A \subset B” \Leftrightarrow “x \in A \Rightarrow x \in B”。$$

其中“ $\Rightarrow$ ”表**導致**，“ $\Leftrightarrow$ ”表**等價**(equivalent)。又

$$“A = B” \Leftrightarrow “A \subset B \text{ 且 } B \subset A”。$$

我們再定義**聯集**(union)、**交集**(intersection)、**餘集**(complement)及**差集**(difference)如下：

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A^c = \{x | x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\},$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

其中“ $\notin$ ”表**不屬於**。可看出

$$A^c = \Omega \setminus A, \quad A \setminus B = A \cap B^c。$$

例1.1 投擲一骰子一次，則 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。令事件 A 表得到偶數之事件， B 表得到點數不超過3之事件， C 表得到奇數之事件。即

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{1, 3, 5\}。$$

則

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A^c = \{1, 3, 5\} = C, \\ A \cap C &= \emptyset, \quad A \cup C = \Omega. \end{aligned}$$

由於事件就是集合，所以關於事件的很多性質，皆可對應集合中的性質。例如，對二事件 A, B ， $A \cup B$ 表 A, B 至少有一件發生之事件， $A \cap B$ 表 A, B 同時發生之事件， A^c 表 A 未發生之事件， $A \setminus B$ 表 A 發生但 B 未發生之事件。我們列出一些常見的性質，證明則略去。

定理1.1 設 A, B, C 為定義於某樣本空間的三事件。則下述各性質成立：

- (i) 交換律 $A \cup B = B \cup A$,
 $A \cap B = B \cap A$;
- (ii) 結合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- (iii) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- (iv) 棣莫根法則 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 。

註1.1 棣莫根(De Morgan, 1806-1871)，為英國數學家。

我們再給可數個事件的聯集及交集之運算。設 $A_1, A_2, \dots$ 為定義於某樣本空間 Ω 的事件。則

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \{x | x \in \Omega, \text{ 且對某一 } i \geq 1, x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \{x | x \in \Omega, \text{ 且對 } \forall i \geq 1, x \in A_i\}. \end{aligned}$$

其中符號“ $\forall$ ”表每一。棣莫根法則亦適用於可數個事件。即對事件 $A_1, A_2, \dots$,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c. \end{aligned}$$

例1.2 設 $\Omega = (0, 1]$, $A_i = [1/i, 1]$ 。則

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1\right] = \Omega, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1\right] = \{1\}. \end{aligned}$$

一般設 T 為一**指標集合**(index set), 可數或不可數皆可, 則

$$\begin{aligned} \bigcup_{r \in T} A_r &= \{x | x \in \Omega, \text{ 且對某 } r \in T, x \in A_r\}, \\ \bigcap_{r \in T} A_r &= \{x | x \in \Omega, \text{ 且對 } \forall r \in T, x \in A_r\}. \end{aligned}$$

例1.3 取 T = 所有正有理數之集合, $A_r = (0, r]$ 。則

$$\bigcup_{r \in T} A_r = (0, \infty), \quad \bigcap_{r \in T} A_r = \emptyset.$$

在統計學裡, 我們會遇到的聯集及交集, 多半為可數個集合。我們再給幾個定義。

兩個事件 A, B , 若滿足 $A \cap B = \emptyset$, 便稱為**互斥**(disjoint, 又稱mutually exclusive); 事件 $A_1, A_2, \dots$ (有限個亦可), 若滿足 $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, 便稱為**每對互斥**(pairwise disjoint)。另外, 若 $A_1, A_2, \dots$ (有限個亦可)為每對互斥, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, 則 $A_1, A_2, \dots$ 便形成 Ω 之一**分割**(partition)。

$\emptyset$ 與任一事件皆互斥, 而 Ω 除與 $\emptyset$ 互斥外, 與其他事件皆不互斥。

例1.4 取 $\Omega = (0, 1]$, $A_i = (1/(i+1), 1/i]$, $i \geq 1$ 。則可看出 $A_i, i \geq 1$, 為每對互斥, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ 。故 $A_i, i \geq 1$, 形成 Ω 之一分割。

重複做一試驗若干次, 有些事件會出現較多次, 有些事件出現的次數則較少。例如, 撲克牌裡的梭哈遊戲, 52張牌, 每人發5張。則長期觀察後, 發現同花比四條出現的**相對頻率**高。這種事件出現的相對頻率, 可以用來解釋機率。機率較大的事件, 出現的相對頻率便較高。不過對機率的解釋, 並不只限於相對頻率的解釋, **主觀的解釋**也是一種。也就是視機率為對一事件之相信程度。

在數學裡給兩個數字0.3及0.5。不用去問0.3或0.5的含義, 而且毫無疑問的 $0.5 > 0.3$ 。但在機率裡, 如果說有兩個銅板 A 與 B , 出現正面的機率各為0.3及0.5, 所代表的意義究竟為何? 各丟一百次, 銅板 A 是否出現30次正面? 顯然不一定。那銅板 B 出現正面的次數是否會較銅板 A 多? 顯然也不一定。由 $0.5 > 0.3$, 並無法轉換成出現正面的次數較多。所以如何解釋機率, 並非一簡單的問題。對於機率, 不能用表面的數學來看它。

底下我們並不擬考慮如何解釋機率, 而要以**公理化的作法**(axiomatic approach), 來定義機率。這是數學的手法, 對初學者而言, 雖較抽象, 但從數學的角度而言, 卻是較簡單的。在數學上, 一個從實際上產生的概念, 一旦發展得夠完全了, 我們便會將其抽象化。例如, 當我們了解實數系統之後, 知道其基本特徵, 於是便列出一些**公理**(axiom), 然後說滿足這些公理的系統, 便是實數。至於這個被稱為實數的系統, 是否是用來計數, 或是否真有一條數線, 我們就不太在乎了。

假設有一樣本空間 Ω , 對每一事件 A , 我們要給一介於0, 1間的數與其對應, 稱做 A 之**機率**, 並以 $P(A)$ 表之。本來將 P 的定義域取為 Ω 之所有子集合所形成之集合, 值域取為區間 $[0, 1]$, 應是很自然的作法。不過通常並非如此做, 稍後我們再說明, 先給一定義如下。

定義1.1 Ω 之一些(至少一個)子集合, 所形成的集合 $\mathcal{F}$, 若滿足下述條件, 便稱為一 **σ -體**(σ -field, 又稱 σ -algebra, 或Borel field):

- (i) 若 $A \in \mathcal{F}$, 則 $A^c \in \mathcal{F}$;
- (ii) 若 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$, 則 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ 。

波瑞爾(Borel, 1871-1956), 為著名的法國數學家, 也是現代機率理論的創始者之一。由定義1.1立即得到 $\emptyset$ 及 Ω 皆屬於 $\mathcal{F}$ 。又若條件(i)及(ii)成立, 由**棣莫根法則**知, 若 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$, 導致 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (習題第10題)。另外, 定義1.1亦導致, 若 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, 則有 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$, 此因只要將 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ 皆取為 Ω 即可。底下常有類似的情況: 對可數個事件成立的結果, 導致對有限個事件亦成立, 只要適當地選取 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ (如在稍後定義1.2, 要將 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ 皆取為 $\emptyset$)。σ-體中的每一元素亦皆為集合, 初學者往往會被此集合的集合之概念所迷惑, 其實倒不是那麼複雜。

例1.5 設 $\Omega = \{1, 2, 3\}$, 則可產生那些σ-體?

解. 首先 $\{\emptyset, \Omega\}$, 及

$$\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

是兩個能最先寫出來的, 前者為最小的, 後者為最大的。所謂最小, 是指若有其他σ-體, 一定包含此σ-體; 而所謂最大, 是指若有其他σ-體, 一定包含於此σ-體。對有限集合, 最小的σ-體及最大的σ-體, 元素個數分別為最少及最多。

除了上述兩個之外, 尚有那些σ-體呢? 一σ-體如果包含 $\{1\}$, 則必包含其餘集 $\{2, 3\}$ 。可檢驗

$$\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

為一σ-體。同理

$$\{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1, 3\}\},$$

$$\{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1, 2\}\},$$

亦皆為σ-體。如果包含 $\{1\}$ 及 $\{2\}$, 則必包含其聯集 $\{1, 2\}$, 因此餘集 $\{3\}$ 亦在其中。有 $\{1\}$, $\{2\}$ 及 $\{3\}$, 那就導致全部的子集都在其中了, 成為最大的σ-體。可檢驗上述5個σ-體, 就是所能產生之全部的σ-體。

例1.6 設 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。已知一 σ -體中有一元素 $\{1, 2\}$ ，試寫出最小的這種 σ -體。

解.首先說明為什麼是說找“最小”，因這種 σ -體有可能不唯一。例如， Ω 之所有子集合所形成的集合為一 σ -體，且當然包含 $\{1, 2\}$ 。

由於有 $\{1, 2\}$ ，因此餘集 $\{3, 4, 5, 6\}$ 亦須在其中。不難看出集合

$$\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

為一 σ -體，且是最小的這種 σ -體。

例1.7 在上例中，試求一包含 $\{1, 2\}$ 及 $\{3\}$ 之最小的 σ -體。

解.由於有 $\{1, 2\}$ 及 $\{3\}$ ，所以也有其聯集 $\{1, 2, 3\}$ ，因此餘集 $\{4, 5, 6\}$ 亦須在其中。再來是 $\{1, 2\}$ 與 $\{4, 5, 6\}$ 的聯集，及 $\{3\}$ 與 $\{4, 5, 6\}$ 的聯集，即 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ 與 $\{3, 4, 5, 6\}$ 皆須在其中。再加上 $\emptyset$ 及 Ω ，可檢驗包含此8個集合之集合，即為所求之 σ -體。

比較例1.6及1.7，可看出雖只是增加一個集合，最小的 σ -體中的元素個數卻可能增加不少。又由上述三個例子，對一有限集合，我們猜想其所形成之任一 σ -體，其元素個數皆為2的次方。這個猜想是對的，也不是特別難證明，不過此處我們略去此討論。

例1.8 設 $\Omega = R = (-\infty, \infty)$ ，令 $\mathcal{B}^1$ 表包含實數上所有開區間之最小的 σ -體。此最小的 σ -體 $\mathcal{B}^1$ 是如何產生？只要取所有這種 σ -體之交集，則由習題第11題知，此交集仍為一 σ -體，而當然就是最小的。任一集合 $A \in \mathcal{B}^1$ ，稱為一波瑞爾集合(Borel set)。由習題第12題知， $\mathcal{B}^1$ 亦包含諸如 $[a, b)$ ， $(a, b]$ 及 $[a, b]$ ， $a < b$ ，等區間。

現在我們可以定義機率函數了。

定義1.2 設 Ω 為一樣本空間， $\mathcal{F}$ 為 Ω 之一些子集合所形成之一 σ -體。則以 $\mathcal{F}$ 為定義域，且滿足下述條件的函數 P ，便稱為一機率函數(probability function):

- (i) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 且為每對互斥, 則

$$(1.1) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)。$$

在上述定義中, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 便構成一**機率空間**(probability space)。而條件(i)-(iii)通常稱為**機率的公理**, 或**柯莫果洛夫公理**(Kolmogorov axioms)。柯莫果洛夫(Kolmogorov, 1903-1987), 被認為是二十世紀俄國最重要的數學家。他在西元1930年左右, 以集合論及**測度論**(measure theory), 經由建立一些公理, 開拓現代機率理論。機率論也因此堂而皇之的進入數學的領域, 並逐漸成為數學主要的一分支。

由定義1.2知, 對同一樣本空間 Ω , 可以有很多不同的機率函數 P , 而且定義域 $\mathcal{F}$ 也不一定相同。例如, 由例1.5-1.7, 對同一 Ω , σ -體可以有好多個。之前我們對樣本空間之每一子集合, 皆稱為事件, 在較高等的機率論裡, 只對所選定的 σ -體 $\mathcal{F}$ 中的元素才稱為事件, 而且只對 $\mathcal{F}$ 中的元素(即事件), 才給機率。對 $\forall A \in \mathcal{F}$, 以 $P(A)$ 表事件 A 發生之機率。 Ω 之子集合若不是 $\mathcal{F}$ 中的元素, 則不用知道(事實上也沒給)其機率。

機率空間是機率論的基礎。若只是處理一些簡單情況下的機率, 則有時可以不用太在意機率空間究竟是什麼, 但在處理一些較細膩的問題時, 所涉及的機率空間是什麼就可能很重要了。有時必須講清楚所欲討論問題之機率空間為何。相當於讓人了解你的活動範圍及遊戲規則為何。

例1.9 設 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, 取

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$$

為一 σ -體。再令

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0, & P(\Omega) &= 1, \\ P(\{1\}) &= 0.2, & P(\{2, 3, 4\}) &= 0.8。 \end{aligned}$$

可檢驗 P 為一機率函數, 因此 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 便構成一機率空間。

在上例中, 我們並不知道 $\{2\}$ 之機率, 因 $\{2\} \notin \mathcal{F}$ 。 Ω 共有16個子集合, 其中有12個我們都未給機率值。這樣設計的想法是什麼?

從數學的角度來看, 這樣的設計是較一般的。即允許不取 Ω 之所有子集合所形成那個最大的 σ -體。允許因興趣(或需要), 只對 Ω 之某些子集合才給其機率。但又規定興趣要合理, 合理到你有興趣的子集合要構成一 σ -體。以例1.9為例, 投擲一四面體, 各面分別有數字1, 2, 3, 4。假設出現1你就贏否則就輸, 所以你會想知道1出現之機率, 因此可以不用關心2出現的機率, 或是諸如2或3(即 $\{2, 3\}$)出現的機率。但若不想知道輸(即 $\{2, 3, 4\}$ 出現)的機率, 便有些駝鳥了。這是在定義1.1裡, 我們要求若 $A \in \mathcal{F}$, 則 $A^c \in \mathcal{F}$ 的原因。定義1.1中的條件(ii)也可比照地解釋。

在大部分統計學的教科書中, 若樣本空間 Ω 為可數的, 且未特別聲明, 則 σ -體就是取成 Ω 之所有子集合所形成之集合。對於不可數的集合, 如實數集合, σ -體則取成包含所有開區間(open interval)之最小的 σ -體。

例1.10 投擲一銅板 n 次, 觀測所得之正面數。則 $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 。令 $\mathcal{F}$ 表 Ω 之所有子集合所形成之集合, 共有 2^{n+1} 個元素。再令 $P(\{i\}) = p_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, 其中 p_i 's 滿足 $\sum_{i=0}^n p_i = 1$ 。又對 $\forall A \in \mathcal{F}$, 令

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i。$$

則 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 便構成一機率空間。

例1.11 投擲一銅板直到出現一正面才停止, 並記載總共之投擲數。則 $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, 為一無限集合。取 $\mathcal{F}$ 為 Ω 之所有子集合所形成之集合。又設第一個正面在第 k 次投擲才出現之機率為 2^{-k} , $k \geq 1$ 。令 $f(k) = 2^{-k}$, $k \geq 1$, 則 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ 。對 $\forall A \in \mathcal{F}$, 令

$$P(A) = \sum_{k \in A} 2^{-k}。$$

則 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 構成一機率空間。

例如, 若令 A 表投擲數為偶數之事件, 即 $A = \{2, 4, \dots\}$, 則

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{3}。$$

一般而言有下述二結果。

例1.12 令 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ 為一可數的集合(因此也可以是有限集合), f 為一定義在 Ω 上的實函數, 滿足

$$f(\omega_i) \geq 0, i \geq 1, \text{ 且 } \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) = 1。$$

令 $\mathcal{F}$ 為 Ω 之所有子集合所形成之集合。再令

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega), A \in \mathcal{F},$$

則 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 即構成一**離散型**的機率空間。

如果是投擲一公正的骰子, 則對應上例,

$$f(\omega_i) = \frac{1}{6}, \omega_i \in \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}。$$

例1.13 設 Ω 為實數 R 上之一區間(有限或無限均可), f 為 Ω 上之一實函數, 滿足

$$f(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega, \text{ 且 } \int_{\Omega} f(\omega) d\omega = 1。$$

令 $\mathcal{F}$ 為包含 Ω 上所有開區間之最小的 σ -體。再令

$$P([a, b]) = \int_a^b f(\omega) d\omega, a, b \in \Omega, \text{ 且 } a < b。$$

則 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 即構成一**連續型**的機率空間。

機率函數有一些基本性質, 我們列出如下, 證明則留在習題。

定理1.2 設 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 為一機率空間。則

- (i) $P(\emptyset) = 0$;
- (ii) $P(A) \leq 1, A \in \mathcal{F}$;
- (iii) $P(A^c) = 1 - P(A), A \in \mathcal{F}$ 。

定理1.3 P 為一機率函數, A, B 為二事件。則

- (i) $P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$;
- (ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- (iii) 若 $A \subset B$, 則 $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, 且 $P(A) \leq P(B)$ 。

因 $P(A \cup B) \leq 1$, 故由上述定理, 即得一關於交集的不等式, 稱做**邦弗朗尼不等式**(Bonferroni's inequality):

$$(1.2) \quad P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1。$$

當二事件之交集的機率不易求時, 可藉此不等式給出該機率之一下限。

若 $P(B) = 1$, 由(1.2)式立即可得

$$P(A \cap B) = P(A)。$$

定理1.4 設有一機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 。

- (i) 設事件 $C_1, C_2, \dots$ 構成 Ω 之一分割, 則

$$(1.3) \quad P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i), A \in \mathcal{F};$$

- (ii) 對任意事件 $A_1, A_2, \dots$,

$$(1.4) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)。$$

(1.4)式即為**波爾不等式**(Boole's inequality, Boole(1815-1864), 為英國數學家)。

若樣本空間 Ω 為一有限集合, 且 Ω 中之每一結果發生的**可能性相同**(所謂 equally likely), 則任一事件發生之機率, 只要計算該事件中元素的個數,

除以 Ω 中元素的個數即可。

例1.14 在一副52張的撲克牌(poker)之梭哈遊戲中, 在所分到的5張牌, 試分別求拿到四條, 一對與三條, 兩對, 三條, 一對, 同花, 順, 同花順之機率。在此所謂一對, 指拿到兩張一樣點數的牌, 外加三張不同點數的牌, 餘類推。

解. 機率空間 Ω 中有 $\binom{52}{5} = 2,598,960$ 個元素。假設牌洗得很好, 則可合理地假設每一手牌出現的機率為 $1/2,598,960$ 。因此(符號“ $\doteq$ ”表近似相等)

$$P(\text{四條}) = \frac{13 \cdot 48}{2,598,960} = \frac{624}{2,598,960} \doteq 0.00024,$$

$$P(\text{一對與三條}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3}}{2,598,960} = \frac{3,744}{2,598,960} \doteq 0.0014,$$

$$P(\text{兩對}) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44}{2,598,960} = \frac{123,552}{2,598,960} \doteq 0.0475,$$

$$P(\text{三條}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2}{2,598,960} = \frac{54,912}{2,598,960} \doteq 0.0211,$$

$$P(\text{一對}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3}{2,598,960} = \frac{1,098,240}{2,598,960} \doteq 0.4226,$$

$$P(\text{同花}) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{2,598,960} = \frac{5,148}{2,598,960} \doteq 0.00198,$$

$$P(\text{順}) = \frac{9 \cdot 4^5}{2,598,960} = \frac{9,216}{2,598,960} \doteq 0.00355,$$

$$P(\text{同花順}) = \frac{4 \cdot 9}{2,598,960} = \frac{36}{2,598,960} \doteq 0.0000139。$$

將機率按小至大排出為同花順, 四條, 一對與三條, 同花, 順, 三條, 兩對, 一對。大英百科全書(Encyclopedia Britannica)說這是傳統的順序(traditional ranking)。我們現在知道, 這其實是可以計算出來的。在賭局中出現的機率愈小則便算愈贏。

上例就是所謂**排列**(permutation)與**組合**(combination)的題材, 大家在中學時代便學過了。在古典的機率模式中, 於丟骰子、玩撲克牌的遊戲裡, 往往是基於結果之出現有相同的可能性, 因此以排列組合的

手法來計算機率。在此，自一集合 Z 中取 k 個相異元素，所形成的一有序列 $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ，稱為 Z 之一 k 個元素的排列。而 Z 之一 k 個相異元素的子集 $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ ，則稱為 Z 之一 k 個元素的組合。若 Z 中有 n 個元素，且 $k \leq n$ ，則 Z 之 k 個元素的排列有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 種， Z 之 k 個元素的組合有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!$ 種，其中

$$k! = k(k-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, k \geq 1,$$

$$0! = 1。$$

我們通常採用記號

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, n \geq 1, n \geq k \geq 0,$$

稱為**二項係數**(binomial coefficient)。又對非負整數 $n_1, n_2, \dots, n_k, k \geq 1$ ，且滿足 $\sum_{j=1}^k n_j = n$ ，

$$(1.5) \quad \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

稱為**多項係數**(multinomial coefficient)。由(1.5)式得

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n_2}, n_1 + n_2 = n, n_1, n_2 \geq 0。$$