第五章

超越函數

5.2 對數

在第三章例2.1, 對每一不等於-1 的有理數n, 利用微積分基本定理, 可給出$\int_a^b x^n dx$, 即

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} 。$$

至於$n = -1$ 時, 上式顯然無法成立。因對$b > a > 0$, $f(x) = x^{-1}$ 爲一連續函數, 故f 在$[a, b]$ 爲可積, 且其任一Riemann 和皆會趨近至$\int_a^b x^{-1} dx$。利用此結果, 令$q = \sqrt[n]{b/a}$, 並以幾何級數a, aq, $aq^2, \cdots, aq^{n-1}$, $aq^n = b$, 將$[a, b]$ 分成n 分, 且令$x_i = aq^i, i = 1, \cdots, n$。則Riemann 和

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (aq^i)^{-1}(aq^i - aq^{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (aq^i)^{-1} aq^i (1 - \frac{1}{q}) \\
&= n(1 - \sqrt[n]{a/b}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b x^{-1} dx 。
\end{aligned}$$

不過$n \to \infty$ 時, $n(1-\sqrt[n]{a/b})$ 之極限爲何, 目前卻也無法求出。但我們知道對$b>a>0$, $\int_a^b x^{-1}dx$ 是存在的。我們便以x^{-1} 之一不定積分, 引進對數函數$\log x$, 且令

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{u}du,\quad x>0 \text{。} \tag{2.1}$$

更明確地講, $\log x$ 爲x 之自然對數(natural logarithm), 若$x>1$便代表雙曲線函數$f(u)=u^{-1}$, 在圖形下由1 至x 的面積。

由於$y=u^{-1}$, $u>0$, 爲一正的連續函數, 函數$\log x$ 對所有的$x>0$ 皆有意義, 並且是一連續且嚴格單調漸增之函數。至於在(2.1) 之右側, 積分下限取爲1, 只是爲了方便。如此會使

$$\log 1=0, \tag{2.2}$$

且$\log x>0$, $\forall x>1$, $\log x<0$, $\forall 0<x<1$。而u^{-1} 在區間$[a,b]$, $a<b$, 之定積分則爲

$$\int_a^b \frac{1}{u}du=\log b-\log a \text{。} \tag{2.3}$$

此積分表雙曲線函數u^{-1}, 在圖形下由a 至b 的面積。

如此我們便引進了一在數學裡能與三角函數相互輝映的新函數。在進一步討論前, 我們先看此函數有那些基本性質。

定理2.1. 對數函數有下述性質:

(i) $\log 1=0$;

(ii) $(\log x)'=1/x,\ x>0$;

(iii) $\log(xy)=\log x+\log y,\ \forall x,y>0$。

證明. (i) 已經證出了, (ii) 則利用微積分基本定理立即可得。現證明(iii)。首先有下式

$$\log(xy)=\int_1^{xy}u^{-1}du=\int_1^x u^{-1}du+\int_x^{xy}u^{-1}du \text{。}$$

而利用變數代換, 令$u/x=t$, 則$du=xdt$, 且

$$\int_x^{xy}u^{-1}du=\int_1^y \frac{1}{xt}xdt=\int_1^y \frac{1}{t}dt \text{。}$$

得證(iii) 。

由上定理之(iii), 取$y=1/x$, 則得

$$0=\log 1=\log x+\log\frac{1}{x}\text{ 。}$$

故有

(2.4)
$$\log\frac{1}{x}=-\log x\text{ 。}$$

一般則有

$$\log\frac{y}{x}=\log y+\log\frac{1}{x}=\log y-\log x\text{ 。}$$

又反覆地利用定理2.1 之(iii), 得對$\forall x_i>0$, $i=1,\cdots,n$,

(2.5)
$$\log(x_1\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\log x_i\text{ 。}$$

特別地, 對任意正整數n,

(2.6)
$$\log(x^n)=n\log x\text{ 。}$$

上式對$n=0$ 仍成立, 此因$x^0=1$ 。若n 爲一負整數, 則$-n>0$, 且

$$\log(x^n)=\log(\frac{1}{x^{-n}})=-\log(x^{-n})=-(-n)\log x=n\log x\text{ 。}$$

現設$\alpha=p/q$ 爲一有理數, 其中p,q 爲整數 。則$(x^\alpha)^q=x^p$, 且

$$\log x^\alpha=\frac{1}{q}\log(x^\alpha)^q=\frac{1}{q}\log x^p=\frac{p}{q}\log x=\alpha\log x\text{ 。}$$

故得

(2.7)
$$\log x^\alpha=\alpha\log x,$$

對$\forall x>0$, 及有理數α 成立 。

在1.3節我們曾得到以$(1+1/n)^n$ 當$n\to\infty$ 時之極限, 來引進常數e 。事實上e 滿足

(2.8)
$$\log e=1,$$

即在曲線$y=1/x$ 之下, 由1 至e 的面積爲1 。我們來看爲何(2.8) 式成立 。(2.8) 式爲e 之一特性, 也就是我們也可定義e 爲滿足$\log x = 1$ 之唯一的實數 。

因$\log x$ 爲連續函數, 故(利用第一章定理5.6)

$$\begin{aligned}\log e &= \log(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\log(1+\frac{1}{n})^n \\ &= \lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{1}{n}) \text{ 。}\end{aligned}$$

再利用積分之均值定理得

$$\log(1+\frac{1}{n}) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u}du = \frac{1}{\xi_n}\frac{1}{n},$$

其中$\xi_n \in (1, 1+1/n)$, 與n 有關 。明顯地$\lim_{n\to\infty}\xi_n = 1$, 故

$$\log e = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\xi_n}\frac{1}{n} = 1 \text{ 。}$$

其次來看對數函數之圖形 。

令$y=\log x$, $x>0$ 。則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0,\ \forall x > 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0,\ \forall x < 0 \text{ 。}$$

故圖形爲漸增且下凹, 即圖形成長較緩慢 。事實上, 此緩慢超過我們的想像 。在5.5 節, 我們會將$\log x$ 與x^n 相比, 那時大家便會較有概念 。因對$\forall x > 0$, y' 及y'' 皆存在且不爲0, 故無極值及反曲點 。又前面已提過$x > 1$ 時, $\log x > 0$, $x < 1$ 時, $\log x < 0$, 再由(2.6) 式便得(注意此爲單調函數)

$$\lim_{x\to\infty}\log x = \infty, \quad \lim_{x\to 0+}\log x = -\infty \text{ 。}$$

因此圖形無水平漸近線, 而$x=0$ 爲垂直漸近線 。圖2.1 爲$y=\log x$ 之圖形 。

中學時代我們其實便學過對數, 一開始是討論以10 爲底(base) 的常用對數 。那時通常是這樣定義的: 設$x > 0$, 則以$\log_{10} x$ 表x 在以10 爲底之對數, 且其值u 爲滿足$10^u = x$ 之實數 。因此$\log_{10} 10 = 1$, 若$x = 10^u$ 且$yy= 10^v$, 則因$xy = 10^{u+v}$, 故

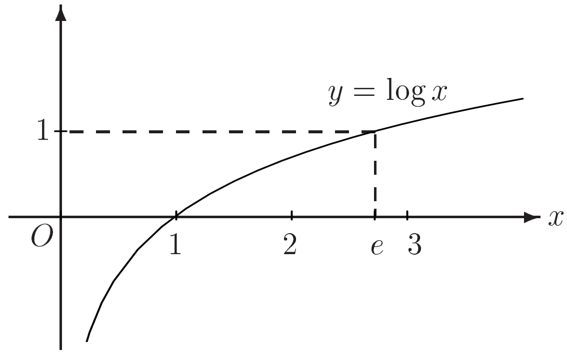


圖2.1. 自然對數函數之圖形

$$\log_{10}(xy) = u + v = \log_{10} x + \log_{10} y \text{ 。} \tag{2.9}$$

此結果可與定理2.1之(iii) 比較 。由於有(2.9) 式, 使對數在處理乘法時方便不少 。例如

$$\begin{aligned}
&\log_{10}(2.7 \times 10^{19}) = 19 + \log_{10} 2.7,\\
&\log_{10}(2.7 \times 10^{-19}) = -19 + \log_{10} 2.7,\\
&\log_{10}(3.28 \times 10^5) \cdot (6.79 \times 10^7) = 5 + 7 + \log_{10} 3.28 + \log_{10} 6.79 \text{ 。}
\end{aligned}$$

原來很大或很小的數, 經取對數後成爲適當的大小 。兩數相乘, 則可藉由取對數而簡化計算 。在那計算工具不發達的時代, 對數的確是很有用的 。人們還以對數的原理發明計算尺, 並做出對數表 。今日計算工具普遍且有效, 對數在計算上已不若以往重要, 但它仍是數學上一極重要的函數 。

以10 爲底的對數之所以稱爲“常用對數”, 是因在實數系統裡, 我們採用十進位, 因此常用對數有許多計算上的方便 。事實上, 對數的底並不需要爲10, 任何正數$b \neq 1$, 皆可採用爲底 。即

$$u = \log_b x \Longleftrightarrow x = b^u \text{ 。} \tag{2.10}$$

而(2.9) 式之對數的基本性質成爲

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \text{。} \tag{2.11}$$

兩個不同的底的對數也有下述關係。設$a, b > 0$, 且皆不爲1則

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{。} \tag{2.12}$$

以上這些大約是我們中學時代所討論的對數題材。

嚴格地講, 以(2.10) 來定義對數, 邏輯上並非那麼嚴密。首先, 欲了解(2.10) 式, 我們要先知道b^u 的意義。設$u > 0$, u 爲整數, 則$b^u = b \cdot b \cdots b$, 表連乘u 個b。若$u = p/q$ 爲一有理數, 則$b^u = \sqrt[q]{b^p}$。而若$u < 0$, $b^u = 1/b^{-u}$。至於b^0 則令爲1。故u 爲有理數時, b^u 的定義還算清楚。但u 不爲有理數時, b^u 的意義, 就不容易掌握了。譬如說$10^{\sqrt{2}}$ 是什麼意思? 如何求其值? b^u 的意義已無法弄清, 更何況還要確定每一$x > 0$, 恰有一u 滿足$x = b^u$, 如此才能定義$\log_b x = u$。而且(2.11) 之成立又基於$b^{u+v} = b^u \cdot b^v$, $u, v \in R$, 而當u, v 不爲有理數時, 這也不知該如何證明。

所以中學時代以上述方式引進對數, 還能爲大家所接受, 實在是基於中學生對數學的涵養不夠, 沒有發現其中的不完善處。當然前述漏洞還是可以補起來, 不過會大費周章。(2.1) 式便是採用一完全不同的方式來定義對數, 既簡潔又顯出微積分的威力及優美。

底下說明爲何以(2.1) 之積分來定義自然對數。稍後我們也會指出若對指數重新適當地定義後, 則還是可以指數來定義對數。

首先, 在數學裡我們對探討函數的性質, 常深感興趣。譬如說: 三角函數有很多美妙的性質。又如函數之周期性、單調性及凹凸性等。將來大家若有機會修機率論, 每一隨機變數也有其各自特殊的性質。這一些性質中, 有一些是所謂特徵的性質。即某一性質爲某一(或一類) 函數所獨特具有的, 看到此性質成立, 我們便能決定是那一(類)函數。這彷彿人的指紋爲人的特徵一般。

對數函數的性質中, 最吸引我們的可能是二正數的乘積之對數, 等於此二數對數之和(即(2.11) 式)。設有一函數f, 我們希望f 滿足

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ x, y \in D, \tag{2.13}$$

其中D 爲f 之定義域。像這種關於一函數在兩個以上的點之方程式, 稱爲一泛函方程式(functional equation)。許多數學上的問題, 常可轉換爲解一泛函方程式, 也就是找出滿足該泛函方程式之所有的函數。通常解一泛函方程式並非易事, 有時會再多給一些條件, 如假設函數爲連續或可微。多了一些這類的假設, 可使我們在解一泛函方程式的過程中, 能做一些必要的運算, 如取極限或微分等。當然, 數學上在解一問題時, 我們通常希望條件要愈弱愈好, 即不需要的假設儘量不要, 而結果卻要愈強愈好, 即要儘量找出最一般的解。一數學定理的推廣, 往往意味條件的放鬆或結果的更一般。

很容易看出$f(x) = 0, \forall x \in D$, 爲(2.13) 之一解。事實上這是當$0 \in D$時, (2.13) 之唯一解。證明如下: 設$0 \in D$且$f$ 爲(2.13) 之一解。取$y = 0$, 得

$$f(0) = f(x) + f(0), \ \forall x \in D,$$

因此$f(x) = 0, \forall x \in D$。即只要$0 \in D$, 則$f(x) = 0, \forall x \in D$。但當$0 \notin D$時, (2.13)除了$f(x) \equiv 0$外是否有其他解? 解一方程式表找出其所有解, 若只是看出有某些解, 工作並未結束, 要確定除了這些解, 再也沒有其他解才行。

現設$0 \notin D$。若$1 \in D$, 則令$x = y = 1$, 得

$$f(1) = 2f(1),$$

因此

$$f(1) = 0 \text{。}$$

若$1, -1$ 皆在D 中, 取$x = y = -1$, 得

$$f(1) = 2f(-1),$$

因此

$$f(-1) = 0 \text{。}$$

若$x, -x, 1, -1 \in D$, 取$y = -1$, 得

$$f(-x) = f(-1) + f(x),$$

因此

$$f(-x) = f(x) \text{ 。}$$

即滿足(2.13) 之f 爲一偶函數 。

假設對$\forall x \neq 0$, $f'(x)$ 皆存在 。將(2.13) 左 、右對x 微分(固定y), 得

$$yf'(xy) = f'(x) \text{ 。}$$

在上式中令$x = 1$, 得$yf'(y) = f'(1)$, 因此

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y},\ \forall y \neq 0 \text{ 。} \tag{2.14}$$

由上式又得在每一不包含0 之閉區間, f' 爲單調, 因此在該區間f' 可積 。又因(2.14) 亦導致f' 在每一前述區間爲連續, 因此微積分基本定理適用, 且

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt = f'(1)\int_c^x \frac{1}{t}dt \text{ 。} \tag{2.15}$$

若$x > 0$, (2.15) 對$\forall c > 0$ 成立 。若$x < 0$, (2.15) 對$\forall c < 0$ 成立 。因$f(1) = 0$, 故在(2.15) 中令$c = 1$, 得

$$f(x) = f'(1)\int_1^x \frac{1}{t}dt,\ x > 0 \text{ 。}$$

再利用$f(x) = f(-x)$, 得

$$f(x) = f'(1)\int_1^{-x} \frac{1}{t}dt,\ x < 0 \text{ 。}$$

上二式即導致

$$f(x) = f'(1)\int_1^{|x|} \frac{1}{t}dt,\ x \neq 0 \text{ 。} \tag{2.16}$$

即得證若$f'(x)$ 存在$\forall x \neq 0$ (此條件其實可鬆些, 不過爲了簡便, 且只是給大家了解對數的定義產生的動機, 我們仍做此假設), 則(2.13) 之解如(2.16) 式 。因$f'(1)$ 爲一常數, (2.16) 可改寫爲

$$f(x) = k\int_1^{|x|} \frac{1}{t}dt,\ x \neq 0, \tag{2.17}$$

其中$k = f'(1)$。若$k = 0$, 則(2.17) 導致$f(x) = 0$, $\forall x \neq 0$, 此解與$f(x) \equiv 0$ 一致。若$f'(1) \neq 0$, 則$f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$。即在除了$x = 0$ 之外, $f'(x)$ 存在, 且f 不恆爲0 之下, 我們證出(2.13) 之解必爲(2.17) 的形式, 其中$k \neq 0$ 爲一常數。

不過須留意的是, 以上的討論只是得到若(2.13) 在一些特定的條件下有解, 則解必須有(2.17) 的形式。至於(2.13) 是否眞有解呢? 對一如(2.17) 之函數f, 可驗證滿足(2.13), 故(2.13) 的確有解。

以上的推導, 是我們以(2.1) 來定義對數函數的動機。雖然(2.17) 之右側定義在$x \neq 0$ 處, 若只考慮$x > 0$, 則函數成爲$1-1$。又k 爲一常數, 爲了簡便, 我們取爲1。

由以上的討論知, 在f 於正數可微的條件下, 滿足$f(xy) = f(x) + f(y)$ 的函數爲

$$f(x) = k \log x, \tag{2.18}$$

其中k 爲一常數。$k = 0$ 的情況我們先排除, 因此時f 恆爲0。若$k \neq 0$, 可如下藉由引進不同底的對數, 而表示出f 與k 的關係。

由(2.18) 知, 若$k \neq 0$, 則存在一$b > 0$, 使得$f(b) = 1$, 即$k \log b = 1$。故$b \neq 1$, 且$k = 1/\log b$, 即(2.18) 可改寫爲

$$f(x) = \log x / \log b \text{ 。}$$

我們給一定義如下。

定義2.1. 設$b > 0$, 且$b \neq 1$。對$\forall x > 0$, x 在以b 爲底之對數, 以$\log_b x$ 表之, 且

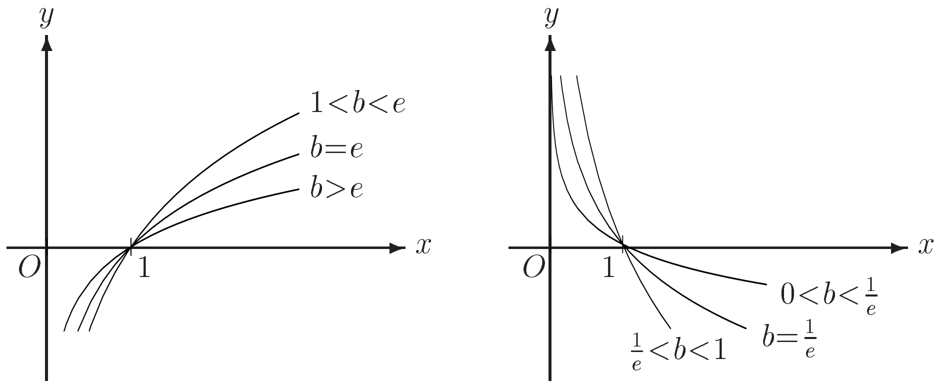
$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \text{ 。} \tag{2.19}$$

由(2.19) 及定理2.1 之(ii), 立即得

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x \log b} \text{ 。} \tag{2.20}$$

又可看出$\log_b b = 1$, 且若$b = e$, 則$\log_e x = \log x$, 故自然對數即爲以e 爲底之對數。由於以b 爲底的對數爲自然對數除以一常數,

因此由$y = \log x$ 的圖形, 只要每一縱座標除以因子$\log b$, 便可得到$y = \log_b x$ 的圖形 。當$b > 1$, 因$\log b > 0$, 此因子爲正, 當$b < 1$, 此因子爲負 。我們給一些圖形如下 。



(a) $b > 1$ (b) $b < 1$

圖2.2. $y = \log_b x$ 之圖形

自然對數又稱Napierian logarithm, 是爲了紀念它的發明者Naiper (1550−1617, 他是個業餘數學家, 爲蘇格蘭Merchiston地方的地主), 他在西元1614 年給出第一個對數的數值表(耗了他20年的功夫), 且是以e 爲底的自然對數 。有時會以$\ln x$ 來特別表示自然對數, 不過因數學中遇到的對數通常是自然對數, 所以較多的時後, 就以$\log x$ 表示自然對數, 並且常省去“自然” 二字, 而只稱對數 。

其次來看如何利用對數函數來求積分 。

因$D \log x = 1/x$, $x > 0$, 故有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C \text{ 。} \tag{2.21}$$

本節一開始我們便指出, 除了-1 之外的有理數n, x^n 的積分皆能給出 。有了(2.21), 對所有有理數n, x^n 的不定積分皆知道了 。至於n不爲有理數的情況, 我們稍後再討論 。由(2.21) 立即可得, 若f 爲連續可微, 則

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) + C \text{ 。} \tag{2.22}$$

當然, 你立刻警覺到因對數只定義在正數, 因此上式只對$f(x) > 0$才有效。若$f(x)$ 不恆爲正將如何?

先看底下的討論。首先若$x \neq 0$, 則

$$\int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt = \log |x| \text{ 。}$$

另外, 若$x > 0$,

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x},$$

若$x < 0$,

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \text{ 。}$$

即得

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x} \text{ 。} \tag{2.23}$$

因此不論x 爲正或負,

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C, \tag{2.24}$$

由此即得只要$f(x) \neq 0$, 且f 在x 爲連續可微,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \text{ 。} \tag{2.25}$$

如此一來即將(2.21) 及(2.22) 擴展到(2.24) 及(2.25)。當然在利用(2.24) (或(2.25)) 求定積分時, 積分區間不可包含$x = 0$ (或$f(x) = 0$)。

例2.1.求$\int \tan x dx$。

解.要一眼看出那一函數的導數等於$\tan x$, 對初學者並不容易。不過, 若寫成$\tan x = \sin x / \cos x$, 且注意到$(\cos x)' = -\sin x$, 則

$$\int \tan x dx = \int \frac{-f'(x)}{f(x)} dx,$$

其中$f(x) = \cos x$。故由(2.25) 式得

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + C \text{ 。}$$

上式對使$\cos x \neq 0$ 之x 皆成立。

例2.2. 求$\int \sec x dx$。
解. 令$u = \sec x + \tan x$, 則

$$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = \sec x(\sec x + \tan x)dx = u \sec x dx \text{ 。}$$

因此

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{u} du = \log |u| + C = \log |\sec x + \tan x| + C \text{ 。}$$

當然你可能會認爲上述作法似乎是在湊答案, 否則如何能看出要令$u = \sec x + \tan x$。底下我們提供另一較自然的作法。令$u = \sin x$, 則$du = \cos x dx$, 且

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1 - u^2} du \\
&= \frac{1}{2} \int (\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}) du = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} + C \\
&= \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C = \log |\sec x + \tan x| + C \text{。}
\end{aligned}$$

例2.3. 求$\int x/(x^2 - 1) dx$。
解.

$$\int \frac{x}{(x^2 - 1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \log |x^2 - 1| + C \text{ 。}$$

例2.4. 求$\int_{-1}^{-3} x^2/(3x - 1) dx$。
解. 令$u = 3x - 1$, 則$du = 3dx$, 且$x = (u + 1)/3$。因此

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-3} \frac{x^2}{3x - 1} dx &= \frac{1}{27} \int_{-10}^{-4} \frac{(u+1)^2}{u} du \\
&= \frac{1}{27} \int_{-10}^{-4} (u + 2 + \frac{1}{u}) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{27}(\frac{1}{2}u^2+2u+\log|u|)\Big|_{-10}^{-4} \\ &= -\frac{1}{27}(30+\log\frac{5}{2}) \text{ 。} \end{aligned}$$

例2.5.求$\int \log x dx$ 。

解.利用分部積分得

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x\log x - \int x d\log x \\ &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\log x - \int 1dx \\ &= x\log x - x + C \text{ 。} \end{aligned}$$

例2.6.求$\int \sin(\log x)dx$ 。

解.利用分部積分得

$$\begin{aligned} &\int \sin(\log x)dx \\ &= x\sin(\log x) - \int xd(\sin(\log x)) \\ &= x\sin(\log x) - \int x\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)dx \\ &= x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int \sin(\log x)dx, \end{aligned}$$

其中最後一等式成立是對$\int \cos(\log x)dx$ 再做一次分部積分 。將$\int \sin(\log x)dx$ 移到左側合併, 得

$$\int \sin(\log x)dx = \frac{1}{2}x\sin(\log x) - \frac{1}{2}x\cos(\log x) + C \text{ 。}$$

如此也得(因倒數第二等號右側有一$\int \cos(\log x)dx$)

$$\int \cos(\log x)dx = \frac{1}{2}x\sin(\log x) + \frac{1}{2}x\cos(\log x) + C \text{ 。}$$

附帶一提, 在我們將二$\int \sin(\log x)dx$ 合併, 爲何會得到常數C? 其原因爲二反導數可能會差一常數, 而不完全相等 。

最後來看, 如何利用對數來簡化微分的計算 。此爲Johann Bernoulli 在西元1697 年所發展出來的 。首先由(2.25) 得

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ 。} \tag{2.26}$$

令$g(x) = \log|f(x)|$, 若$g'(x)$ 較$f'(x)$ 容易求, 則(2.26) 導致

$$f'(x) = g'(x)f(x) \text{ 。} \tag{2.27}$$

此法特別是當f 爲一些簡單的函數之乘積時, 最爲有用 。底下給幾個例子 。

例2.7.求$D\log\sqrt{(x^2+1)^3/(x^2-1)}$ 。
解.先簡化對數得

$$\log\sqrt{\frac{(x^2+1)^3}{x^2-1}} = \frac{3}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x^2-1) \text{ 。}$$

因此

$$\begin{aligned} D\log\sqrt{\frac{(x^2+1)^3}{x^2-1}} &= \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1} \\ &= \frac{3x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2-1} \\ &= \frac{2x^3-4x}{x^4-1} \text{ 。} \end{aligned}$$

例2.8.令$f(x) = (x+\cos x)^3(x^2+\sin x)^{-4}$, 求$f'(x)$ 。
解.令$g(x) = \log|f(x)|$, 則

$$g(x) = 3\log|x+\cos x| - 4\log|x^2+\sin x| \text{ 。}$$

因此

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3(1-\sin x)}{x+\cos x} - \frac{4(2x+\cos x)}{x^2+\sin x} \text{ 。}$$

故

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1-\sin x)(x+\cos x)^2(x^2+\sin x)^{-4} \\ &\quad -4(2x+\cos x)(x+\cos x)^3(x^2+\sin x)^{-4} \text{ 。} \end{aligned}$$

習　題　5.2

1. 試繪下述各函數的圖形 。

   (i) $y=\log(-x),\ x<0,$　(ii) $y=\log|x|,\ x\neq 0,$
   (iii) $y=\log(1+x),\ x>-1,$　(iv) $y=\log(1-x),\ x<1,$
   (v) $y=\log x/x,\ x>0$ 。

2. 試證$\log_b x=(\log_b a)(\log_a x)=\log_a x/\log_a b$ 。

3. 分別以對數函數表示

   (i) $\int_{-1}^{x}\frac{1}{t}dt,\ x<0,$ (ii) $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt,\ x>0$ 。

4. 試證對$\forall m\geq 2,$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}<\log m<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1} \text{ 。}$$

5. (i) 求滿足$\log x=c+\int_e^x t^{-1}dt,\ \forall x>0,$ 之常數c 。

   (ii) 令$f(x)=\log((1+x)/(1-x)),\ -1<x<1$ 。若a,b 爲二常數且$ab\neq -1$, 求滿足$f(x)=f(a)+f(b)$ 之所有x 。

6. 試證$\log u+u=0$ 恰有一實數解 。

7. 解下述各方程式 。

   (i) $\log(1+x)=\log(1-x),$
   (ii) $2\log x=x\log 2,$
   (iii) $\log(1+x)=1+\log(1-x),$
   (iv) $\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})=1$ 。

8. 試證

(i) $1-x^{-1}<\log x<x-1,\ \forall x>0,\ x\neq 1;$

(ii) $x/(1+x)<\log(1+x)<x,\ \forall x>0,$

(iii) $x-x^2/2<\log(1+x)<x,\ \forall x>0;$

(iv) $\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}x^i/i<\log(1+x)$
$<\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i+1}x^i/i,\ \forall x>0$ 。

9. 求下述各函數之導數 。

(i) $y=\log\sqrt{3+2x^2}$, (ii) $y=\log(1+\sqrt{x+1})^{-2}$,

(iii) $y=\log(\log x)$, (iv) $y=\log_x e$,

(v) $y=\log(x^2\log x^3)$, (vi) $y=(x^3+4x)^5(2x^2+\cos x)^{-2}$,

(vii) $y=x\sin(\log x)-x^2\cos(\log x)$,

(viii) $y=(x^3-1)^4(\sqrt{x}+1)^3/(x^2+1)^{1/3}$ 。

10. 求下述各積分 。

(i) $\int\frac{1}{2+3x}dx$, (ii) $\int_0^3\frac{x}{2x^2+3}dx$,

(iii) $\int\frac{1}{x\log x}dx$, (iv) $\int\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}dx$,

(v) $\int\frac{\log x}{x}dx$, (vi) $\int\frac{1}{x\log x\log(\log x)}dx$,

(vii) $\int\log^2 x dx$, (viii) $\int_0^{1-e^2}\frac{\log(1-t)}{1-t}dt$,

(ix) $\int x\log^2 x dx$, (x) $\int x^n\log(ax)dx$,

(xi) $\int x^2\log^2 x dx$, (xii) $\int\cot x dx$ 。

11. 試證下述遞迴公式, 其中$m\neq -1$ 。

$$\int x^m\log^n x dx=\frac{x^{m+1}\log^n x}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m\log^{n-1}x dx,$$

並利用此公式, 求出$\int x^3\log^3 x dx$ 。

12. 分別利用羅必達規則及第8 題(ii), 試證

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{x}=1\text{ 。}$$

13. 設n, r 爲正整數, 求

$$\lim_{r\to\infty}(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\cdots+\frac{1}{r+nr})\text{ 。}$$

14. (i) 利用例2.5, 試證對$\forall n\geq 2$,

$$\begin{aligned}&\log 1+\log 2+\cdots+\log(n-1)\\&<n\log n-n+1<\log 2+\log 3+\cdots+\log n;\end{aligned}$$

(ii) 利用(i), 試證

$$e(\frac{n+1}{e})^{n+1}>n!>e(\frac{n}{e})^{n}\text{ 。}$$

在7.3節之習題, 我們會再度給出$n!$之估計 。

15. 設連續函數$f(x)$ 定義在$x>0$, 滿足對$\forall x,y>0$, $\int_x^{xy}f(t)dt$ 與x 無關 。令$f(2)=2$, 求函數$A(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$ 。

16. 設連續函數$f(x)$ 定義在$x>0$, 滿足

$$\int_1^{xy}f(t)dt=y\int_1^x f(t)dt+x\int_1^y f(t)dt,\ \forall x,y>0\text{ 。}$$

令$f(1)=3$, 求$f(x)$, $x>0$ 。

17. 令$f(x)=(\log(x+1)-\log x)/\log^2 x$, $x\geq 2$ 。試證f 爲一漸減函數, 且$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 。

18. 試證必不存在二多項式$f(x)$及$g(x)$, 使得

$$\log x=f(x)/g(x),\quad \forall x>0\text{ 。}$$

19. 利用$\log_2 3\doteq 1.58$, 歸納法及均值定理, 試證對$\forall n\geq 3$,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\log_2 n\text{ 。}$$