第四章

微分之應用

4.5 微分之應用問題

前面幾節所討論的都是關於微分的各種應用。至此我們可說已具備微分的基本工具。對所擬解決的一實際問題, 我們就是要利用適當的已知結果, 然後將該問題解出。

例5.1.用鋁片做容量100cm^3之圓柱形罐, 用什麼尺寸才可使材料最省。

解.設圓柱型的半徑爲r, 高爲h。則由已知之條件, 得

$$\pi r^2 h = 100 \text{。} \tag{5.1}$$

欲材料最省, 即表面積最小。而表面積爲上下二圓面積加側面積, 即

$$\begin{aligned} f(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{200}{r}, 0 < r < \infty, \end{aligned}$$

此處由(5.1) 得$h = 100/(\pi r^2)$ 代入。我們便是要找出r 使$f(r)$ 最小, 即找絕對極小值。經微分得

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{200}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 50)}{r^2},$$
$$f''(r) = 4\pi + \frac{400}{r^2} > 0 \text{。}$$

令$f'(r) = 0$, 得$r = r_0 = (50/\pi)^{1/3}$ 時有臨界點。又$f''(r)$ 恆爲正, 故此爲相對極小值。

由於絕對極小值可能發生在臨界點或f 不可微的點。而

$$\lim_{r\to 0+} f(r) = \infty,\ \lim_{r\to\infty} f(r) = \infty,$$

皆不會是極小。故在$r_0 = (50/\pi)^{1/3}$ 時有絕對極小。此時高爲

$$h = 100/(\pi r^2) = 2(50/\pi)^{1/3} = 2r_0 \text{。}$$

即高等於直徑時, 材料最省。

例5.2.(i) 選取二非負數, 使其和爲1, 且平方和最大;

(ii) 選取二非負數, 使其和爲1, 且平方和最小。

解.設二數爲x 及y, 已知$x + y = 1$。本題(i) 便是要使$x^2 + y^2$ 最大, (ii) 要使$x^2 + y^2$ 最小。因$y = 1 - x$, 故$x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$。

令$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, 則$f'(x) = 4x - 2$, $f''(x) = 4 > 0$。令$f'(x) = 0$, 得$x = 1/2$ 爲唯一之臨界點。又因$f''(1/2) > 0$, 故在$x = 1/2$ 有極小。又邊界點$x = 0$ 或1, $f(0) = f(1) = 1 > f(1/2) = 1/2$。

故在$x = 1/2$ (此時$x = y$) 有絕對極小, 在$x = 0$ 或$x = 1$ 皆有絕對極大。值得注意的是, 若本例改爲x 及y 皆爲正數, 則$x = 0$ 及$x = 1$ 皆不在定義域中, 故此時無絕對極大值。

例5.3.(i) 選取二非負數, 使其和爲1, 而乘積最大;

(ii) 選取二非負數, 使其和爲1, 而乘積最小。

解.本例作法類似上題。(i) 之解爲$x = y = 1/2$, (ii) 之解爲$x = 0$,

$y=1$ 或$x=1$, $y=0$ 。而若改爲選取二正數, 則(ii) 無解 。

例5.4.在x-y 平面上有一拋物線$x^2=4y$, 在y 軸上有一定點$(0,b)$ 。求拋物線與$(0,b)$ 最接近的點 。

解.$(0,b)$ 與拋物線上任一點之距離爲$d=\sqrt{x^2+(y-b)^2}$, 其中$x^2=4y$ 。若$b\leq 0$, 則顯然拋物線上$(0,0)$ 與$(0,b)$ 最近, 且距離爲$-b$ 。現設$b>0$ 。

首先求d 之極小與求d^2 之極小是等價的 。而

$$d^2=x^2+(y-b)^2=4y+(y-b)^2=y^2+y(4-2b)+b^2,\ y\geq 0 \text{ 。}$$

令$f(y)=y^2+y(4-2b)+b^2$, $y\geq 0$, 則

$$\begin{aligned} f'(y)&=2y+4-2b,\\ f''(y)&=2>0 \text{ 。}\end{aligned}$$

令$f'(y)=0$, 得$y=b-2$ 爲唯一之臨界點 。

若$b<2$, 因$b-2<0$, 此時$b-2$ 不爲解(因$y>0$) 。即$b<2$ 時, 無臨界點 。再檢驗邊界點, $y=0$ 時, $f(0)=b^2$, 而$\lim_{y\to\infty}f(y)=\infty$ 。故在$y=0$ 有絕對極小 。事實上若$b<2$, 則$f'(y)>0$, $\forall y\geq 0$ 。即此時f 爲漸增, 故極小發生在f 定義域中左側端點$y=0$ 。此時極小值爲$\sqrt{f(0)}=b$ 。

若$b\geq 2$, 因$f''(y)>0$, $\forall y\geq 0$, 故在臨界點$y=b-2$ 有相對極小, 且極小值爲

$$f(b-2)=(b-2)^2+(b-2)(4-2b)+b^2=4(b-1) \text{ 。}$$

即最短距離爲$\sqrt{f(b-2)}=2\sqrt{b-1}$ 。

結論如下: $b<2$ 時, 拋物線上$(0,0)$ 最接近$(0,b)$, 且距離爲$|b|$ 。$b\geq 2$ 時, 拋物線上$(2\sqrt{b-2},b-2)$ 與$(-2\sqrt{b-2},b-2)$ 皆爲最接近$(0,b)$ 之點, 且距離爲$2\sqrt{b-1}$ 。

例5.5.某校應用數學系欲租遊覽車一部旅行 。公司出租費的算法是, 每車基本費5000 元, 每有x 名乘客須多付$8x$ 元 。另外, 旅館費

定價每人1000 元, 每超過40 人, 每人可少付超出人數6 倍之減價優待(例: 45 人時, 每人房錢$1000-6(45-40)=970$) 。遊覽車最多只能坐60 位旅客 。問旅客多少時, 每人平均負擔最少?

解.設有x 人, 則總花費為

$$g(x)=\begin{cases} 5000+8x^2+x(1000-6(x-40)) & , \quad 40\leq x\leq 60, \\ 5000+8x^2+1000x & , \quad 0<x<40 \text{ 。} \end{cases}$$

而平均負擔為

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{x} \\ &= \begin{cases} \frac{5000}{x}+2x+1240 & ,40\leq x\leq 60, \\ \frac{5000}{x}+8x+100 & ,1\leq x<40 \text{ 。} \end{cases} \end{aligned}$$

令$f'(x)=0$, 得$x=50$, 當$40\leq x\leq 60$; $x=25$, 若$1\leq x<40$ 。而

$$\begin{aligned} f(50) &= 100+100+1210=1440, \\ f(25) &= 200+200+1000=1400 \text{ 。} \end{aligned}$$

又對端點1, 40 及60, 分別有

$$\begin{aligned} &f(1)=5000+8+1000=6008, \\ &f(40)=125+100+1240=1465, \\ &f(60)=5000/60+120+1240=1443\frac{1}{3} \text{ 。} \end{aligned}$$

故知$f(25)$ 為最小值, 即旅客為25 人時, 每人平均負擔最輕 。

例5.6.給定三角形之一邊長及面積, 求其周長最小者 。

解.設$\triangle ABC$ 中, $\overline{AB}$ 之長度$2a$ 給定 。因面積亦給定, 故$\overline{AB}$ 上之高h 固定 。將此三角形置於座標平面上, $\overline{AB}$ 放在x 軸上, 且以原點為其中點, 頂點C 之座標為(x,h) 。依題意知要求x, 使得$AC+BC+2a$ 最小, 即$AC+BC$ 最小 。令

$$f(x)=AC+BC=\sqrt{(x+a)^2+h^2}+\sqrt{(a-x)^2+b^2},\ -a\leq x\leq a \text{ 。}$$

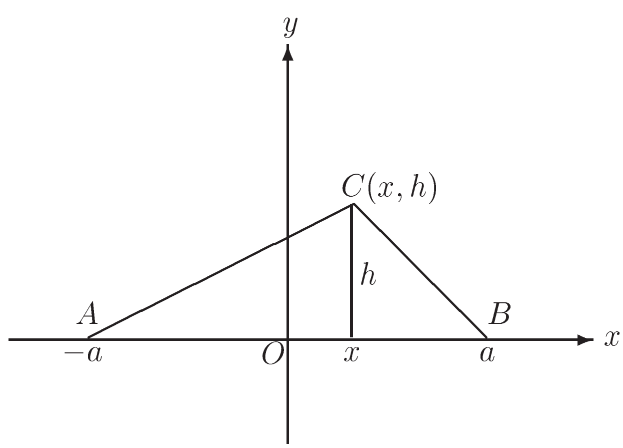
則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}}, \\ f''(x) &= \frac{-(x+a)^2}{\sqrt{((x+a)^2+h^2)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+h^2}} \\ &\quad + \frac{-(x-a)^2}{\sqrt{((x-a)^2+h^2)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h^2}} \\ &= \frac{h^2}{\sqrt{((x+a)^2+h^2)^3}} + \frac{h^2}{\sqrt{((x-a)^2+h^2)^3}} 。\end{aligned}$$

令$f'(x) = 0$, 並經化簡得$4ah^2x = 0$, 故$x = 0$ 爲唯一之臨界點 。因

$$f''(0) = \frac{2h^2}{(a^2+h^2)^{2/3}} > 0,$$

故在$x = 0$ 有極小值$f(0) = 2\sqrt{a^2+h^2}$ 。又$f(a) = f(-a) = \sqrt{4a^2+h^2} + h > 2\sqrt{a^2+h^2} = f(0)$, 故在$x = 0$ 有絕對極小值 。即此時$\triangle ABC$ 爲等腰三角形 。



另外, 本例若改爲給定一邊長及周長, 即可證明等腰三角形亦爲面積最大者 。

例5.7.設平面上有A 、B 二點在一直線之同一側 。在此直線上求一點, 使此點至A, B 二點之距離和最小 。

解.如圖, 即要在x 軸上找一點P, 使得$PA + PB$ 最小 。

令

$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(a-x)^2+h_1^2},\ 0\le x\le a\text{ 。}$$

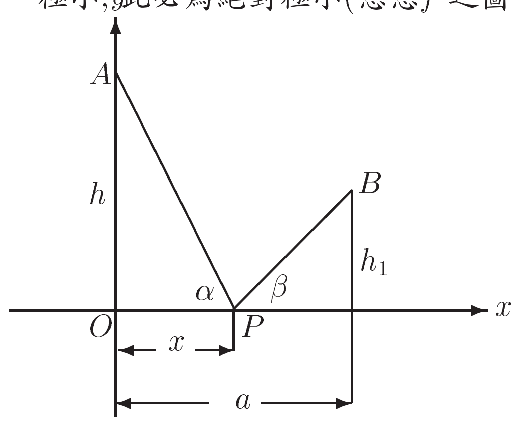
則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(a-x)^2+h_1^2}},\\ f''(x) &= \frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{h_1^2}{\sqrt{((a-x)^2+h_1^2)^3}}>0\text{ 。}\end{aligned}$$

令$f'(x)=0$, 得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}},$$

而此即$\cos\alpha=\cos\beta$, 亦即$\alpha=\beta$ 。又$f''(x)$ 恆爲正, 故當$\alpha=\beta$ 時, f 有極小 。因只有一極小,此必爲絕對極小(想想f 之圖形的形狀) 。



本例之解與光學上之反射原點(optical law of reflection) 有關 。光學上有一重要的費馬最短時間原理(Fermat's principle of least time) 。即在某些所給定的條件下, 光線由A 至B 所走的路徑, 依所需花最短的時間而定 。在此最短時間與最短距離同義, 因此由A 經線上一點至B, 則當入射角α 等於反射角β 時, 所花之時間最短 。

在上例中, 若A 、B 在直線之異側, 則顯然P 爲$\overline{AB}$ 與直線之交點 。上例當然也可用幾何方法來解, 相信大家以前便熟悉了 。至

於下例若不藉助微積分便不是很容易了。

例5.8. 設平面上二點A、B 在一直線之異側(如圖)。設在A 這側與B 那側速度分別爲c_1 及c_2。求由A 至B 所需時間最短之路徑。

解. 明顯地, 本例即要在x 軸找一點P, 使得沿二線段$\overline{AP}$ 及$\overline{PB}$ 花最短時間。令

$$f(x)=\frac{1}{c_1}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{h_1^2+(a-x)^2},\ 0\le x\le a\text{。}$$

令 $f'(x)=0$, 得當

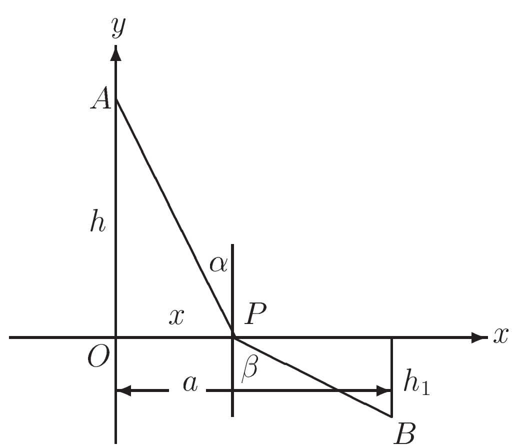
$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}$$

時, f 有極小(且爲絕對極小)。而上式又等價於

$$\frac{\sin\alpha}{c_1}=\frac{\sin\beta}{c_2}\text{。}$$

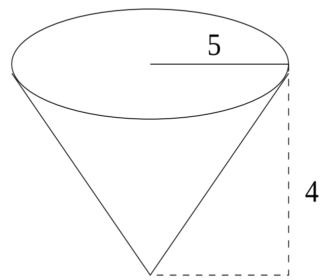
可證明在x 軸上恰有一點滿足上式。

本例仍可用光學上的最短時間的原理來說明。設在二種介質中(如空氣與水), 光線速度分別爲c_1, c_2。則由第一種介質中的A 點至第二種介質中的B 點, 光線所走的路徑需滿足上式(此即 Snell's law of refraction)。



另外, 有所謂相關速率(related rates) 的問題 。

例5.9.設有一圓錐的桶子, 高爲4 公尺, 底半徑爲5 公尺, 以每小時3 立方公尺的速率注水入其中 。令$h(t)$ 表在時間t 水之高度, 求$h=2$ 時, dh/dt 。



解.本例即求在水高度$h=2$ 時, h 之瞬時增加速度 。令$V(t)$ 表在時間t, 桶中水之體積, 由題意知

$$\frac{dV}{dt}=3 \text{ 。} \tag{5.2}$$

因要由給定dV/dt, 而求dh/dt, 所以稱之爲相關速率 。令$r(t)$ 表在時間t 時水面之半徑, 則由題意知,

$$\frac{r(t)}{h(t)}=\frac{4}{5} \text{ 。}$$

又

$$V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(\frac{5}{4}h)^2 h=\frac{25}{48}\pi h^3 \text{ 。} \tag{5.3}$$

結合(5.2) 及(5.3) 得

$$3=\frac{dV}{dt}=\frac{25}{48}3\pi h^2\frac{dh}{dt} \text{ 。}$$

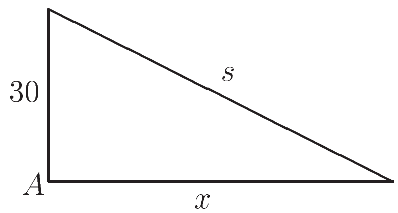
因此當$h=2$ 時,

$$\frac{dh}{dt}=3\frac{48}{25\pi}\frac{1}{12}=\frac{12}{25\pi} \text{ 。}$$

例5.10.某人坐在岸邊釣魚, 岸離水面30 呎 。當釣到魚時, 收釣線的速度爲每秒2 呎 。求線長爲50 呎時, 魚沿水面之速度 。

解. 由題意知$ds/dt=-2$, 欲求$s=50$ 時dx/dt 。因

$$x^2+30^2=s^2,$$



故

$$2x\frac{dx}{dt}=2s\frac{ds}{dt}=-4s,$$

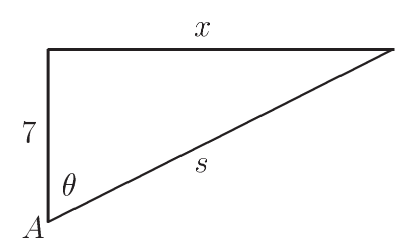
且

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2s}{x} 。$$

當$s=50$ 時, $x=40$, 故此時$dx/dt=-100/40=-2.5$, 即瞬時速度爲每秒-2.5 呎 。速度爲負, 因魚距A 點的距離漸減 。

例5.11. 設一飛機之高度爲7 哩, 水平等速飛行速度爲每分鐘10 哩 。某人在地面A 點觀測飛機, 求當飛機距此人水平距離爲24 哩時, 觀測角度之變化 。

解.



如圖, 已知$dx/dt=-10$, 欲求$x=24$ 時, $d\theta/dt$ 。利用$\tan\theta=x/7$, 得

$$\frac{d\tan\theta}{dt}=\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{7}\frac{dx}{dt}=-\frac{10}{7} 。$$

因此

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{10}{7}\cos^2\theta 。$$

當$x=24$ 時, $s=\sqrt{7^2+24^2}=25$ 。此時$\cos\theta=7/25$, 故

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{10}{7}(\frac{7}{25})^2=-\frac{70}{605}\text{ 。}$$

在很多應用問題中, 常會遇到需解方程式的根的時候。設有一函數f, 我們想找出那些會滿足$f(x)=0$ 的x 。如果f 是一次式或二次式, 當然沒問題, 三次式及四次式也有公式解, 只是較複雜。但是f 也不一定是多項式, 即使是簡單的三次式, 那些複雜的公式, 有時也不見得能讓我們知道根的值大小究竟爲何。底下我們便提供一找根的近似解的方法, 稱之爲牛頓法(Newton's method)。

設f 爲一可微函數, 我們想找$f(x)=0$ 之根。先找一接近根的數, 以x_0 表之, 此可利用勘根定理(第一章定理6.2)。欲找一更接近根的值, 作過$y=f(x)$ 之圖形上的點$(x_0,f(x_0))$ 之切線, 並交x 軸於x_1 。切線之方程式爲

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\text{ 。}$$

令$y=0$ 便求出x 截距, 即

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\text{ 。}$$

然後自x_1 出發, 重複上述步驟, 依序得x_2, x_3,$\cdots$, 直至精確度爲我們所滿意。不過, 若起始值x_0 找得不好, 依序得到的x_1, x_2,$\cdots$, 可能離根很遠。一般而言, 要避免x_0 接近$y=f(x)$ 之極值。

又x_{n+1} 與x_n 有下述關係, 這是牛頓法的遞迴公式, 證明則留在習題。

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\cdots\text{ 。} \tag{5.4}$$

稍後我們會證明, 在適當的條件下, $n\to\infty$ 時, x_n 會趨近至$f(x)=0$ 之一根(並且收斂得很快)。我們先看圖5.1 。

設r 爲$f(x)=0$ 之一根, 如圖5.1, 若在r 附近, f 之圖形爲上凹, 則x_0 宜取在r 的右側, 如此x_1, x_2,$\cdots$ 才會愈來愈接近r 。其他的情形也很容易由圖形判斷x_0 取在何處較佳。

設在r 之一鄰域B 中, f'' 連續, 且$f'(x)$, $f''(x)$ 不爲0 。因$f(r) = 0$, 由(3.24) 之泰勒展式得(取$a = x_n$, $x = r$)

$$0 = f(r) - f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(r - x_n)^2,$$

其中c 介於r 與x_n 間 。將上式每一項各除以$f'(x_n)$, 得

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2 = 0,$$

由上式又得

$$x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2, \tag{5.5}$$

其中第一等式是由(5.4) 式而來 。

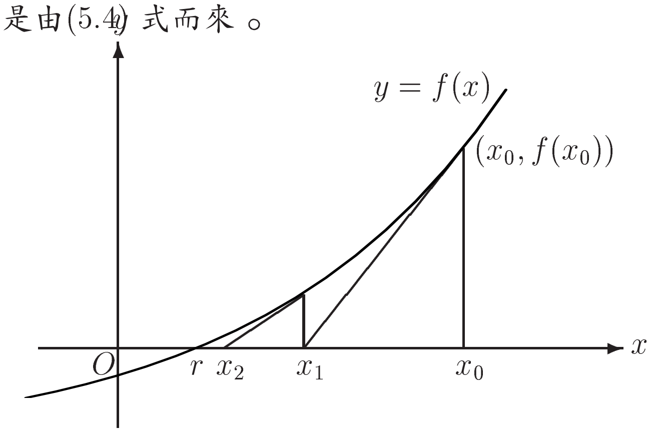


圖5.1. 牛頓法之步驟

f' 與f'' 的正負情況共有四種組合, 我們只討論其中一種, 其餘三種情況的討論類似 。

假設在B 中$f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 則由(5.5) 式知$r < x_{n+1}$ 。若$r < x_n$ 亦成立, 則因f 爲漸增, $f(x_n) > f(r) = 0$, 故由(5.4) 式又得$x_{n+1} < x_n$ 。因此$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > r$ 爲一單調且有界的數列, 因此$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 以r' 表此極限值 。再在(5.4) 中兩側令$n \to \infty$, 得

$$r = r' = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ 。}$$

即得證由牛頓法得到的數列$\{x_n, x \geq 1\}$ 的確會趨近至f 的一個根。

其次看牛頓法求根的誤差。

首先由均值定理得(利用$f(r)=0$)

$$r - x_n = \frac{f(r)-f(x_n)}{f'(c)} = \frac{-f(x_n)}{f'(c)},$$

其中c 介於r 與x_n 間。故若$|f'(c)| \geq M$, 其中M 爲一常數, 則

$$|r - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \text{。} \tag{5.6}$$

因當n 夠大時, x_n 很接近r, 因此$f(x_n)$ 很接近$f(r)=0$, 故上式當n 夠大時, 可用來作誤差之一很好的估計值。

次由(5.5) 式得

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r-x_n)^2 \text{。}$$

因此若$|f'(x_n)| \geq M_1$, $|f''(c)| \leq M_2$, 其中M_1, M_2 爲二常數, 則得

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M_2}{2M_1}|x_n - r|^2 \text{。} \tag{5.7}$$

故若M_2/M_1 不大, 由上式可看出x_n 趨近至r 的速度相當快。上式亦可做爲誤差之估計。

例5.12.求$2x^3+x^2-x+1=0$ 之一近似根。

解.令$f(x)=2x^3+x^2-x+1$, $f'(x)=6x^2+2x-1$。因此(5.4) 式成爲

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3+x_n^2-x_n+1}{6x_n^2+2x_n-1} \text{。} \tag{5.8}$$

因$f(-1)=1>0$, $f(-2)=-9<0$, 故在$(-2,-1)$ 中有一根。由於$|1|<|-9|$, 故猜測根應較接近-1。取$x_0=-1.2$, 再利用(5.8) 式

而得表5.1 。

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
1	-1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	-1.23511
2	-1.23511	-0.00711	5.68276	-0.00136	-1.23375
3	-1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	-1.23375
4	-1.23375				

表5.1

由表5.1可看出, x_3 及x_4 之小數前5 位已完全相同, 我們大約可停止了, 即-1.23375 爲一近似根, 且誤差小於10^{-5} 。

若$x_{n+1}-x_n$ 愈來愈小, 便可得到近似根 。若$x_{n+1}-x_n$ 不趨近至0, 則牛頓法失效, 見下例 。

例5.13.利用牛頓法求$\sqrt{3}$ 之近似值 。

解.$\sqrt{3}$ 即爲$x^2-3=0$ 之正根 。因$1.7^2=2.89<3<1.8^2=3.24$ 。取$x_0=1.8$ 。又$f(x)=x^2-3$, $f'(x)=2x$,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{3}{x_n})\text{ 。}$$

因此

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.73333, \\ x_2 &= 1.73205, \\ x_3 &= 1.73205\text{ 。} \end{aligned}$$

由於x_2 與x_3 之小數前5 位相同, 故知$\sqrt{3}$ 至小數第5 位的近似值爲1.73205 。若欲更精確, x_1 的小數位數須多取幾位 。

在上二例中, 我們看到即使不利用(5.6) 或(5.7) 之誤差公式, 使用牛頓法幾次後, 便也約略可看出誤差的大小 。底下二例即利用誤

差公式。

例5.14. 令$x_0=3$。求$\sqrt{7}$之近似值。

(i) 用牛頓法做三次並估計誤差;

(ii) 若要誤差小於10^{20}, 問需以牛頓法做幾次?

解. (i) 令$f(x)=x^2-7$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$。

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-7}{2x_n}=\frac{x_n^2+7}{2x_n}\text{。}$$

依序可得

$$x_1=\frac{8}{3},\ x_2=\frac{127}{48},\ x_3=\frac{32257}{12192}\doteq 2.6457513123\text{。}$$

因$r<c<x_3$, 而$r>2$, 故$|f'(c)|>4$。因此由(5.6)式

$$|r-x_3|\leq\frac{|f(x_3)|}{4}<1.7\cdot 10^{-9}\text{。}$$

不但看出只以牛頓法做三次便已相當精確, 且知

$$2.6457513106<r<2.6457513124\text{。}$$

(ii)由(5.7)得

$$|x_n-r|\leq\left(\frac{M_2}{2M_1}\right)^{2^n-1}|x_0-r|^{2^n}\text{。}$$

不難看出$\sqrt{7}>2.6$, 故$|f'(x_n)|=|2x_n|>5.2$, 又$f''(c)=2$, 故$M_2=2$。另外, $|x_0-r|\leq 0.4$。令

$$\left(\frac{0.4}{5.2}\right)^{2^n-1}\cdot 0.4<10^{-20},$$

可得$n=5$即可。

例5.15. 求$x^3+x-1=0$之根至小數第三位。

解. 令$f(x)=x^3+x-1$。因$f(0)=-1$與$f(1)=1$符號相反, 故

在$(0,1)$ 間有一根。又$f'(x)=3x^2+1>0$, 故f 有唯一的根在$(0,1)$ 間。

取$x_0=1$, 則由

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2+x_n-1}{3x_n^2+1}=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2+1},$$

依序可得$x_1=0.75$, $x_2=\frac{59}{86}$, $x_3=\frac{523407}{767077}\doteq 0.682$。取$M_1=1$ 可看出x_3 已精確至小數第三位。

例5.16.設$f(x)=x^{1/3}$, 則顯然$x=0$ 爲$f(x)=0$ 之唯一根。但因$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, 故若採用牛頓法, 則

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}}=x_n-3x_n=-2x_n\text{ 。}$$

因此

$$x_{n+1}=(-2)x_n=(-2)^2x_{n-1}=\cdots=(-2)^{n+1}x_0\text{ 。}$$

故如果x_0 選取的不是0, 則x_n 不會趨近至0。

習　題　4.5

1. 自曲線$y=x^3$ 上取一點P, 且設過P 之切線交曲線於另一點Q。試證在Q 之切線斜率爲在P 之切線斜率之4 倍。

2. 設$f(x)=ax^2+bx+c$, 其中a, b, c 爲實數。又設$|f(x)|\le 1$, $\forall |x|\le 1$。試證$|f'(x)|\le 4$, $\forall |x|\le 1$。

3. 設有一紙盒, 底爲正方形, 所用材料之面積爲C, 求底邊長及盒高, 使容量最大。

4. 有一河寬1 公里, 自東岸一發電廠架設電纜至下游5 公里西岸的工廠。假設水底架設費用爲地面架設費用的5/3 倍。問沿什麼路線架設最經濟?

5. 試證圓的內接三角形中, 以正三角形的面積最大 。

6. 試證圓的外切三角形中, 以正三角形的周長最短 。

7. 求拋物線$y = x^2$ 上最接近$(3, 0)$ 的點 。

8. 試證$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ 爲曲線$y = x^2 - x$ 上最接近$(1, 1)$ 的點 。

9. 在橢圓$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$, 上找一點, 使得此點與$(c, 0)$ 之距離最短 。

10. 自一邊長爲12 吋的正方形紙板, 截去四個角(亦爲正方形), 組成一無蓋之長方體盒子 。問此長方體之最大容量爲何?

11. 設有一底半徑爲6 吋且高爲10 吋之正圓錐體 。求內接於此圓柱體的最大體積, 並求出此時圓柱體底半徑與高 。

12. 設有直線道路連接A, B 兩點及B, C 兩點, 又設$\overline{AB}$ 垂直$\overline{BC}$ 。今欲在$\overline{AB}$ 上找一點P, 並修築新道路$\overline{PC}$, 舊道路$\overline{AP}$ 也需修補 。若修補舊道路與築新路, 每公里成本爲1 比2, 又設$\overline{AB}$ 爲40 公里, $\overline{BC}$ 爲20 公里 。試找出P, 使築路之總費用最低 。

13. 設有一半徑爲6 呎的球狀汽球, 以每秒1/10 立方呎的速度漏氣 。求汽球的半徑遞減之速度 。

14. 某梯子長20 呎, 斜靠在牆壁, 並設梯子的頂端以每秒1.5 呎的速度滑下 。求當梯子頂端距地面16 呎時, 梯子底部離開牆壁之速度 。

15. 設某人身高6 呎, 以每秒4 呎的速度向高爲14 呎的街燈走去, 令θ 表此人頭部與燈頭的連線與燈柱間之夾角 。求當此人離燈柱12 呎時, θ 的變化率 。

16. 試證(5.4) 式 。

17. 以牛頓法求$x^3+x^2+x=2$ 之一近似根並精確至小數第3 位, 取$x_0=1$ 。

18. 以牛頓法求$x^3+2x^2-2x=5$ 之一近似根, 取$x_0=1.5$ 。

19. 設

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \quad x\geq 0,\\ -\sqrt{-x} & , \quad x<0\text{ 。}\end{cases}$$

試證若以牛頓法求$f(x)=0$ 之根, 則得$x_0=-x_1=x_2=-x_3=\cdots$ 。

20. (i) 試證$x^3-x-1=0$ 恰有一實根;

(ii)試以牛頓法求(i) 中之方程式之近似根至小數5 位精確 。

21. 求$x^3+x+1=0$ 的根至小數第三位 。

22. 試證$x^3-4x+1=0$ 恰有三實根, 並求此三根之近似值至小數5 位精確 。

23. 試求$2x-\cot x=0$ 介於0 與1 間之一近似根, 並精確至小數第3 位 。

24. 欲求$\sqrt{13}$ 之近似值 。

(i) 令$x_0=4$, 用牛頓法兩次, 並估計誤差;

(ii) 若要誤差小於10^{-10}, 問要用牛頓法幾次?

參考文獻

1. Apostol, T. M. (1967). *Calculus*, Vol I, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, New York.