# 第四章

# 微分之應用

## 4.4 極限之不定形

在處理極限問題時, 我們常會遇到所謂不定形 (indeterminate form) 。例如,求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

而$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ 。有時這種情況仍可輕易解決 。例如, 求$\lim_{x\to 0} x^3/x^2$, 不難看出極限值爲0 。但有時就不是那麼容易了 。例如, 求$\lim_{x\to 0}(x-\tan x)/(x-\sin x)$ 。當然還有一些其他形式的不定形 。如當$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ 且$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, 求$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$; 當$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, 求$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$; 或當$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 且$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, 求$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ 。還有一些變形, 如當$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 且$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, 求$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$; 或當$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ 且$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, 求$\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x))$ 。一般而言, 極限之不定形有下述幾種形式:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^0 \text{ 。}$$

我們說明一下這些符號的意思。設有二函數$f$ 及$g$ 及一常數$a$, $a \in \bar{R} = R \cup \{\infty, -\infty\}$。上述各種形式分別表

| $x \to a$ 時 | 要求 |
|---|---|
| (i) $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty,$ | $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)),$ |
| (ii) $f(x) \to 0, g(x) \to \infty,$ | $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x),$ |
| (iii) $f(x) \to 0, g(x) \to 0,$ | $\lim_{x\to a} f(x)/g(x),$ |
| (iv) $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty,$ | $\lim_{x\to a} f(x)/g(x),$ |
| (v) $f(x) \to \infty, g(x) \to 0,$ | $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)},$ |
| (vi) $f(x) \to 1, g(x) \to \infty,$ | $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)},$ |
| (vii) $f(x) \to 0, g(x) \to 0,$ | $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$。 |

其中有些形式是等價的, 基本上只有一種$0/0$ 的形式, 其他幾種皆可化爲$0/0$ 的形式。不過因$\infty/\infty$ 的形式也常出現, 我們通常就不特別地把$\infty/\infty$ 的形式化爲$0/0$ 的形式。換句話說, 我們主要考慮$0/0$ 及$\infty/\infty$ 二種形式。另外, $a$ 可以是一實數也可以是$\infty$ 或$-\infty$。當$a$ 爲實數時, 也可考慮單側極限(即$x \to a+$ 或$x \to a-$) 之不定形。又除了前面七種不定形, 當然還有一些極限是關於$-\infty$ 的不定形。如在(iv) 中, 當$f(x) \to \infty$, 且$g(x) \to -\infty$, 求$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$。底下我們引進一種經由微分來求不定形極限的有用方法, 即羅必達規則(L'Hospital's rule)。L'Hosptial $(1661-1704)$ 有時寫成L'Hôptial, 他是法國數學家。在西元1696 年寫出歷史上第一本微積分教科書。此書有很多不同的版本, 微積分的能廣爲流傳該書貢獻很大。但該書大部分的內容, 包括此著名的羅必達規則, 材料其實都源自於羅必達老師之一Johann Bernoulli(1667-1748, John Bernoulli)。

羅必達規則的基本想法是由二函數之導數的商$f'(x)/g'(x)$ 之極限, 來求$f(x)/g(x)$ 之極限。爲什麼此二極限會有關係呢? 在給一完整的證明之前, 我們略微說明如下。設$f$ 及$g$ 滿足$f(a) = g(a) = 0$。則對$\forall x \neq a$, 只要$g(x) \neq 0$, 下式成立:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{(f(x) - f(a))/(x - a)}{(g(x) - g(a))/(x - a)}\text{。}$$

若$f'(a)$ 及$g'(a)$ 存在, 且$g'(a) \neq 0$, 則當$x \to a$, 上式之最右側趨近至$f'(a)/g'(a)$ 。因此$x \to a$ 時, $f(x)/g(x) \to f'(a)/g'(a)$ 。

不過在羅必達規則中, 事實上並不需要對$f$ 、$g$ 及$f'$ 、$g'$ 在$a$ 點做任何假設 。而只需假設當$x \to a$ 時, $f(x)$ 及$g(x)$ 皆趨近至0 (在此是指對0/0 的不定形), 且$f'(x)/g'(x)$ 趨近至一有限的極限值 。羅必達規則便是說, 此時$f(x)/g(x)$ 亦趨近至同一極限值 。我們敘述並證明此結果如下 。

**定理4.1.** 設函數$f$ 及$g$ 在開區間$(a,b)$ 可微, $a < b$, 且設

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \text{ 。} \tag{4.1}$$

又設$g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, 且

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{4.2}$$

存在 。則

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ 。} \tag{4.3}$$

**證明.** 我們將利用柯西均值定理(定理1.5) 在一以$a$ 爲端點之閉區間 。但因$f$ 及$g$ 有可能在$a$ 無定義, 因此我們定義二新函數如下 。令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \ , & x \neq a, \\ 0 \ , & x = a; \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) \ , & x \neq a, \\ 0 \ , & x = a \text{ 。} \end{cases}$$

則$F$ 及$G$ 皆在$a$ 連續 。又由假設及$F$ 與$G$ 之定義, 對$\forall x \in (a,b)$, 函數$F$ 及$G$ 皆在閉區間$[a,x]$ 連續, 且在開區間$(a,x)$ 可微 。所以對函數$F$ 、$G$ 及區間$[a,x]$, 利用柯西均值定理, 得存在一$c \in (a,x)$, 使得

$$(F(x) - F(a))G'(c) = (G(x) - G(a))F'(c) \text{ 。}$$

因$F(a) = G(a) = 0$, 故上式成爲

$$f(x)g'(c) = g(x)f'(c) \text{ 。} \tag{4.4}$$

又$g'(c) \neq 0$ (已假設$g'$ 在$(a,b)$ 中皆不爲0), 且$g(x)$ 不能爲0 (否則因$G(x) = G(a) = 0$, 由Rolle 定理知, 存在一$x_1 \in (a,x)$ 使得$G'(x_1) = g'(x_1) = 0$, 此與$g'$ 在$(a,b)$ 中均不爲0 不合) 。因此經兩側同除以$g(x)g'(c)$, (4.4)成爲

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{。}$$

當$x \to a+$, $c \to a+$ (此因$c \in (a,x)$), 而又由假設$\lim_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = L$ 存在, 故$x \to a+$ 時, 上式右側趨近至$L$, 即(4.3) 成立 。

上述定理是針對右極限 。不難加以修正條件而得到一關於左極限(即$x \to a-$) 或兩側極限(即$x \to a$) 的結果 。底下給幾個例子 。

**例4.1.**求

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \text{。}$$

**解.**因$\lim_{x\to\pi} \sin x = \lim_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$, 利用羅必達規則得

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = -1 \text{。}$$

**例4.2.**求

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} \text{。}$$

**解.**此爲一$0/0$ 之不定形, $f(x) = x - \tan x$, $g(x) = x - \sin x$ 。而

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x}$$

仍爲一$0/0$ 之不定形 。上式右側等於

$$\frac{1-1/\cos^2 x}{1-\cos x} = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} = -\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \to -2,$$

當$x \to 0$ 。故所欲求之極限爲$-2$ 。

在上例中, 若先經簡化, 則$(1-\sec^2 x)/(1-\cos x) = -(1+\cos x)/\cos^2 x$ 已非一不定形, 故不能再利用羅必達規則, 否則分

子分母各自再微分得

$$-\frac{\sin x}{2\cos x\sin x}=-\frac{1}{2\cos x}\to -\frac{1}{2}$$

之錯誤結果 。只要仍是不定形, 羅必達規則便可再度使用, 但要確定是不定形才可 。又在計算過程中, 適當地消去分子與分母之共同項, 常可簡化運算 。

**例4.3.**求

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x}\text{ 。}$$

**解.**利用羅必達規則, 得所欲求之極限爲

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-2}{2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6}{2}=3\text{ 。}$$

顯然第一個等式是錯的, 因$\lim_{x\to 1}(6x-2)/(2x-1)$ 已非一不定形 。事實上此時已可將$x$ 以1 代入, 而得極限$(6-2)/(0-1)=4$ 。

**例4.4.**求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\text{ 。}$$

**解.**我們只列出計算過程如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}\\ &= -\frac{1}{6}\text{ 。}\end{aligned}$$

在上例中, 對第二個等號右側的極限, 我們也可利用第一章的(5.16) 式, 即

(4.5)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

而直接得到極限值爲$-1/6$。但值得注意的是, 我們是否可利用羅必達規則來證明(4.5) 式? 在第一章定理5.7 中, 我們費了一番功夫才證出(4.5) 式, 但若用羅必達規則, 很快便可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1\text{ 。}$$

此中的關鍵是, 使用羅必達規則, 必須用到sine 函數之微分, 但sine 函數之微分卻要用到(4.5) 式(見第二章例7.6)。在數學上我們是不可這樣循環證明。即由$A$ 導出$B$, 但$A$ 之成立卻得用到$B$。

羅必達規則可再推廣。首先看關於$x\to\infty$ 時, $f(x)/g(x)$ 的極限。若令$t=1/x$, 則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f_1(t)}{g_1(t)},$$

其中$f_1(t)=f(1/t)$, $g_1(t)=g(1/t)$, $t\neq 0$。因此由定理4.1 可得下述結果。

**定理4.2.** 設$f'(x)$ 及$g'(x)$ 皆存在, $\forall x>M$, 其中$M$ 爲一固定的正數。又設

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0,$$

且$g'(x)\neq 0$, $\forall x>M$。現若$\lim_{x\to\infty}f'(x)/g'(x)$ 存在, 則可得$\lim_{x\to\infty}f(x)/g(x)$ 亦存在, 且二極限值相等。

**證明.** 令$L=\lim_{x\to\infty}f'(x)/g'(x)$。且令$f_1(t)=f(1/t)$, $g_1(t)=g(1/t)$, $t\neq 0$。則

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(t)}{g_1(t)},\tag{4.6}$$

其中$t=1/x$。顯然$x\to\infty$ 若且唯若$t\to 0+$。因當$t\to 0+$ 時, $f_1(t)/g_1(t)$ 爲一$0/0$ 之不定形, 故可由$f_1'(t)/g_1'(t)$ 之極限來求$f_1(t)/g_1(t)$ 之極限。由連鎖規則

$$f_1'(t)=-\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t}),\ g_1'(t)=-\frac{1}{t^2}g'(\frac{1}{t})\text{ 。}$$

又由假設$g_1(t) \neq 0, \forall 0 < t < 1/M$ 。由上式可得, 當$x = 1/t$ 且$x > M$ 時,

$$\frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 。}$$

因此若$x \to \infty$ 時, $f'(x)/g'(x) \to L$, 則$t \to 0+$ 時, $f_1'(t)/g_1'(t) \to L$ 。而如前所述, 羅必達規則又導致

$$L = \lim_{t \to 0+} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{t \to 0+} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} \text{ 。}$$

但由(4.6) 式, $f_1(t)/g_1(t) = f(x)/g(x)$, 證畢 。

當然我們也可平行地寫出一當$x \to -\infty$ 時, 類似定理4.2 的結果 。又當$x \to a$ (或$a+$, $a-$, $a$ 也可以是$\infty$ 或$-\infty$) 時, 若$f(x) \to \infty$ 且$g(x) = \infty$, 此時我們說$f(x)/g(x)$ 有一$\infty/\infty$ 之不定形, 則仍有對應的羅必達規則, 我們就不陳述了 。基本上對$0/0$ 或$\infty/\infty$ 的不定形, 在適當條件下,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 。} \tag{4.7}$$

又在使用羅必達規則時, 若上式右側極限爲$\infty$ (或$-\infty$), 則左側極限亦爲$\infty$ (或$-\infty$) 。

**例4.5.**求

$$\lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\sec\theta}{\tan\theta} \text{ 。}$$

**解.**此爲一$\infty/\infty$ 之不定形 。利用羅必達規則, 得

$$\lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\sec\theta}{\tan\theta} = \lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta} = \lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\tan\theta}{\sec\theta} \text{ 。}$$

若再用一次羅必達規則, 得

$$\lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta\tan\theta} = \lim_{\theta \to \pi/2-} \frac{\sec\theta}{\tan\theta} \text{ 。}$$

顯然已無法由此法求出極限值。但因$\tan\theta/\sec\theta = \sin\theta$, 故得$\theta \to \pi/2-$ 時, 極限值爲1。

上例顯示羅必達規則並非萬能, 在實際應用中, 有時要做些變通。

**例4.6.**求

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{3x^2+x+2}\text{。}$$

**解.**經由羅必達規則可求出極限爲1/3, 此與我們以前所知相同。

**例4.7.**求

$$\lim_{x\to 0+} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})\text{。}$$

**解.**此爲一$\infty - \infty$ 之不定形。經由通分, 可轉化爲一$0/0$ 之不定形。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) &= \lim_{x\to 0+} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} \\
&= \frac{0}{2-0} = 0\text{。}
\end{aligned}$$

利用羅必達規則時, 要有警覺性, 隨時留意是否爲不定形。

**例4.8.**求

$$\lim_{x\to\infty} x^4(\cos\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2})\text{。}$$

**解.**此爲一$\infty\cdot 0$ 之不定形。若令$t = 1/x$, 則

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(1/x) - 1 + 1/(2x^2)}{1/x^4} = \lim_{t\to 0+} \frac{\cos t - 1 + t^2/2}{t^4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0+} \frac{-\sin t + t}{4t^3} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{-\cos t + 1}{12t^2} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{24t} = \frac{1}{24} \text{ 。}
\end{aligned}
$$

等到第五章我們介紹幾個新函數後, 不定形將更富變化。$\infty^0$, $1^\infty$ 及$0^0$ 的不定形也留在那時再討論。附帶一提, 讀者是否能想像爲何這三種極限亦爲不定形? 我們只說明$0^0$ 的不定形, 其餘兩種留給讀者自己去討論。對於$(f(x))^{g(x)}$, 我們知道若$g(x) \equiv 0$ 且$f(x)$ 不會取值0, 則$(f(x))^{g(x)} \equiv 1$; 而若$f(x) \equiv 0$ 且$g(x)$ 不會取值0, 則$(f(x))^{g(x)} \equiv 0$。另外, 若$f(x) \equiv c_1 \neq 0$ 爲一常數, 且$g(x) \to 0$, 則$(f(x))^{g(x)} \to 1$; 若$g(x) \equiv c_2 \neq 0$ 爲一常數, 且$f(x) \to 0$, 則$(f(x))^{g(x)} \to 0$。但現在是$f$ 與$g$ 都在變動, 且二者均往0 接近, 這時$(f(x))^{g(x)}$ 會趨近至何值, 就會有各種可能, 須視個別情況而定。另外, 有時也可利用上一節的泰勒展式來求不定形的極限。例如, 對例4.4, 我們已用羅必達規則求出極限爲$-1/6$, 但利用下式也可同樣得到此值。

$$
\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - x^3/6 + o(x^4) - x}{x^3} = \frac{-x^3/6 + o(x^4)}{x^3} \text{ 。}
$$

**例4.9.**求

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\cot x - \frac{1}{x}) \text{ 。}
$$

**解.**首先由例3.8, $x \to 0$ 時

$$
\begin{aligned}
\cot x &= \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x) \text{ 。}
\end{aligned}
$$

故當$x \to 0$ 時,

$$
\frac{1}{x}(\cot x - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{3} + o(1) \to -\frac{1}{3} \text{ 。}
$$

# 習　題　4.4

$1-18$ 題利用羅必達規則, $19-24$ 題利用泰勒展式求極限。

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$。
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$。
3. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 3x}{\sec^2 x}$。
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\cot 3x}{\cot 2x}$。
5. $\lim_{u\to 0}\frac{\tan 2u}{u\sec u}$。
6. $\lim_{x\to 0+}\frac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}}$。
7. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}$。
8. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan x}$。
9. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x-5}{\sec x+4}$。
10. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$。
11. $\lim_{x\to\infty}x^{1/4}\sin(1/\sqrt{x})$。
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x-x^3/6}{x^5}$。
13. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$。
14. $\lim_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1})$。
15. $\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$。
16. $\lim_{t\to 1}\frac{nt^{n+1}-(n+1)t^n+1}{(t-1)^2}$。
17. $\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^n x^k-n}{x-1}$。
18. $\lim_{x\to 1+}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}})$。
19. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$。
20. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$。
21. $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$。
22. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$。
23. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$。
24. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x-2x^2}{x^4}$。

25. 令

$$f(x)=\frac{\sin 4x\sin 3x}{x\sin 2x}\text{。}$$

分別求$\lim_{x\to 0}f(x)$ 及$\lim_{x\to\pi/2}f(x)$。

26. 求常數$a$ 及$b$, 使得

$$\lim_{x\to 0}(x^{-3}\sin(3x)+ax^{-2}+b)=0\text{。}$$

27. 求常數$a$ 及$b$, 使得

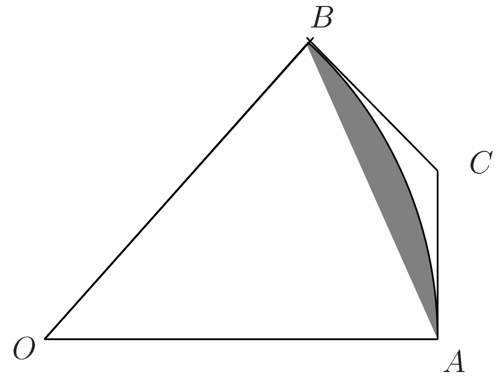
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=1\text{。}$$

28. 試對$n,k$ 討論何時下述極限存在, 若存在並求其極限值。

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin^n x}-\frac{1}{x^k}\right),$$

其中$n,k$爲正整數。

29. 如圖設有一半徑爲1, 角度爲$x$ (弳度) 之圓弧, $C$ 爲在$A$ 、$B$ 二點之切線的交點 。




令$T(x)$ 表三角形$ABC$ 之面積, $S(x)$ 表陰影之面積 。求$T(x)$ 、$S(x)$ 及$\lim_{x\to 0+} T(x)/S(x)$ 。