第四章

微分之應用

4.3 泰勒展開式

我們先介紹微導的概念。

在3.7 節, 我們曾以如下的方式定義導數: 設有一函數$y = f(x)$, 則

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中$\Delta y = f(x+h) - f(x)$, $\Delta x = h$。對一固定的x, 我們定義函數ε爲

$$\varepsilon = \varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \text{。} \tag{3.1}$$

則顯然

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \text{。}$$

注意Δy 表當自變數由x 移動至$x + h$ 時, 應變數y 的改變(或稱增量(increment))。而由(3.1) 可得

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x \text{。} \tag{3.2}$$

即Δy 可表示爲兩個量之和, 第一個爲與$f'(x)$ 成正比之$f'(x)\Delta x$, 第二個爲$\varepsilon \Delta x$, 此項只要Δx 取得夠小, 則與Δx 之比值(即ε) 可以任意

小。我們便將$f'(x)\Delta x$ 稱爲y 在x 之微導, 並以dy 表之, 即

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x \text{ 。} \tag{3.3}$$

對任一可微函數f 及一固定的x, 其微導爲一$h = \Delta x$ 之線性函數。例如, 對函數$y = x^2$,

$$dy = d(x^2) = 2x\Delta x = 2xh \text{ 。}$$

若函數爲$y = x$, 因其導數爲常數1, 故得

$$dx = \Delta x = h \text{ 。} \tag{3.4}$$

因此(3.3) 式成爲

$$dy = df(x) = f'(x)dx \text{ 。} \tag{3.5}$$

(3.2) 式也可改寫爲

$$\Delta y = f'(x)dx + \varepsilon dx = dy + \varepsilon dx \text{ 。} \tag{3.6}$$

故應變數的增量Δy 與微導dy 之差爲εdx, 此項通常不爲0。例如, 若$y = x^2$, 則$dy = 2xdx$, 且

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = dy + \varepsilon dx,$$

故此時$\varepsilon = dx$。

如3.7 節所述, 採用萊布尼茲的微分符號dy/dx, 純粹只是因導數爲$\Delta y/\Delta x$ 當$\Delta x \to 0$ 時之極限而來。dy/dx 整個是一個符號, 而非dy 除以dx。但若依我們上述對微導的定義, 而得(3.5) 式, dy/dx 實際上便可當做dy 除以dx。此處dy 與dx 已經沒有"無限小的"之意義了(見(3.4) 及(3.5) 二式), 而是二分別爲$h = \Delta x$ 之線性函數。若Δx 很大, 則dy 與dx 也可很大。dy 與dx 之商會等於f 之導數$f'(x)$ 也不足爲奇了, 只是把(3.5) 式改寫而已。

同理, 我們也可定義高階微導, 即令

$$d^2y = f''(x)(\Delta x)^2 = f''(x)(dx)^2,$$
$$d^3y = f'''(x)(dx)^3,$$

等。如此一來與萊布尼茲對高階導數的符號也會一致(將$(dx)^2$寫dx^2, $(dx)^3$ 寫成dx^3 等)。

(3.2) 式也可改寫爲

$$f(x+h)=f(x)+\Delta y=f(x)+hf'(x)+\varepsilon h, \tag{3.7}$$

即若固定x, $f(x+h)$ 若視爲一h 之函數, 可表示爲一h 的線性函數$f(x)+hf'(x)$, 加上一誤差εh。此誤差只要h 夠小, 與h 相比便可任意小。以線性函數$f(x)+hf'(x)=f(x)+dy$ 來逼近$f(x+h)$, 也就是省略εh, 即以dy 取代Δy。其幾何意義爲, 以在x 之切線$f(x+h)=f(x)+hf'(x)$, 來取代曲線$y=f(x)$。只要h 夠小, 其誤差便不會太大, 見圖3.1。

由圖3.1 可看出, 在x 附近的一個點$x+dx$, 其函數值本來應爲$f(x+h)=f(x)+\Delta y$, 但f 可能爲一複雜的函數, Δy 不一定好求。線性函數是一非常簡單的函數, 函數值可很容易求出。只要h

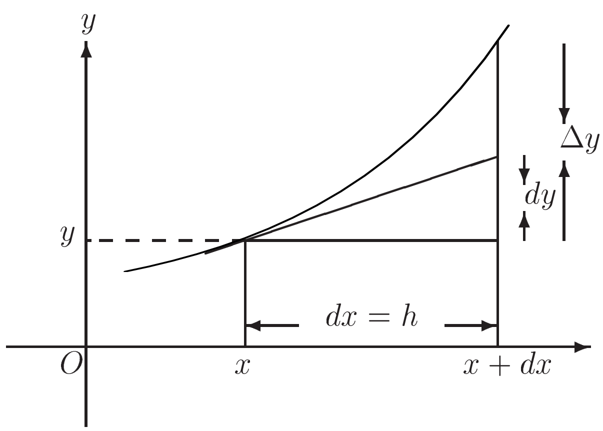

圖3.1. 微導dy 與增量Δy

很小, $y=f(x)$ 之圖形與過x 之切線差異不大, 所以在x 附近某點之函數值, 可以在切線上對應的y 取代, 即$f(x)+dy$。這樣的估計雖造成誤差$\Delta y-dy$, 但卻可使計算簡易許多。至於誤差多大是我們允許的範圍? 視不同情況而定。一般而言, 若要誤差愈小, h 便要取得愈小。底下我們利用均值定理來估計誤差εh 的大小。

由均值定理知, 對$\forall h>0$, 存在一ξ 介於x 與$x+h$ 間, 使得

$$f(x+h)-f(x)=hf'(\xi),$$

故

$$\varepsilon=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=f'(\xi)-f'(x) \text{ 。}$$

若f 在x 的附近爲二次可微, 則再一次利用均值定理可得

$$\varepsilon=f'(\xi)-f'(x)=(\xi-x)f''(\eta),$$

其中η 爲介於ξ 與x 間的某數, 故η 亦介於x 與$x+h$ 間 。若存在一常數$M>0$, 使得f'' 在閉區間$[x,x+h]$ (此爲$h>0$ 的情況, 若$h<0$ 則區間改爲$[x+h,x]$) 之絕對值以M 爲其一上界, 則

$$|\varepsilon|=|(\xi-x)f''(\eta)|\leq hM \text{ 。}$$

故$f(x+h)$ 與$f(x)+hf'(x)$ 之差εh, 其絕對值不超過Mh^2 。當h 夠小時, Mh^2 與$hf'(x)$ 相比會很小, 除非$f'(x)$ 爲0 (見(3.7) 式) 。如前面已說明過的, 在一小區間以一線性函數來逼近一函數, 在實際應用時很重要 。不但如此, 即使在較高等的數學分析中也很重要 。我們會繼續討論這種逼近, 稍後也會證明事實上前述誤差可估計得更精確, 即$|\varepsilon h|\leq Mh^2/2$ 。

我們可將以線性函數來逼近函數的想法加以推廣 。多項式可說是分析裡所遇到的函數中最簡單的 。對一多項式函數$y=f(x)$, 任給一x 不但可很容易計算出函數值$f(x)$, 有關微分及積分的運算, 可說也是最容易的 。底下我們將證明, 許多函數皆可以一適當的多項式來逼近 。

設f 爲一在$x=0$ n 次可微的函數, $n\geq 1$ 。我們想找一多項式P, 此多項式在$x=0$ 與f 至n 階導數皆相同(在某種意義下, 表P 與f 在$x=0$ 附近夠接近) 。即P 要滿足下述$n+1$ 個條件

$$P(0)=f(0),\ P'(0)=f'(0),\cdots,P^{(n)}(0)=f^{(n)}(0) \text{ 。} \tag{3.8}$$

故我們試一n 次多項式, 即令

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n \text{ 。} \tag{3.9}$$

在(3.9) 中令$x=0$, 即得$P(0)=c_0$, 故$c_0=f(0)$。其次將(3.9) 左、右分別對x 微分, 再令$x=0$, 得$P'(0)=c_1$, 故$c_1=f'(0)$。餘此類推, 可得

$$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k=0,1,\cdots,n, \tag{3.10}$$

其中$f^{(0)}=f$。故若一次數不超過n 之多項式滿足(3.8), 則其係數必須滿足(3.10) (若$f^{(n)}(0)\neq 0$, 則P 之次數爲n)。反之, 若一多項式其係數滿足(3.10), 也必滿足(3.8) (此多項式之係數有可能大於n)。因此我們即證出了下述結果。

定理3.1. 設f 爲一在$x=0$ n 次可微之函數。則恰存在一次數不超過n 之多項式P 滿足(3.8) 之條件, 且P 爲

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\ 。\tag{3.11}$$

同理可證, 恰存在一次數不超過n 之多項式P, 與f 在$x=a$ 至n 階導數皆相同。事實上, 只要將P 寫成一$x-a$ 之乘冪, 並如前之推導, 則可得

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\ 。\tag{3.12}$$

此爲唯一的次數不超過n 之多項式滿足

$$P(a)=f(a),\ P'(a)=f'(a),\cdots,P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)\ 。\tag{3.13}$$

我們便將(3.12) 右側之多項式稱爲f 在a 之n 次泰勒多項式(Taylor polynomial, Brook Taylor (1685–1731) 爲英國數學家, 是牛頓的學生, 在西元1715 年出版Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 提供將一函數展開成級數的方法, 一世紀後, 高斯及柯西將其方法嚴密化), 並以P_n 表此多項式。

例3.1. 求sine 函數在$\pi/2$ 之4 次泰勒多項式。

解. 令$f(x)=\sin x$。則

$$f(x)=\sin x,\ f(\pi/2)=1,$$

$$\begin{aligned} &f'(x)=\cos x,\ f'(\pi/2)=0,\\ &f''(x)=-\sin x,\ f''(\pi/2)=-1,\\ &f'''(x)=-\cos x,\ f'''(\pi/2)=0,\\ &f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(4)}(\pi/2)=1 \text{。} \end{aligned}$$

故

$$P_4(x)=1-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^4 \text{。}$$

而若取$a=0$, 因一般而言有$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k)}(0)=0$, 故

$$P_{2n-1}(x)=P_{2n}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{。}$$

例3.2. 求cosine 函數在0 之$2n$ 次泰勒多項式。

解. 令$f(x)=\cos x$, 因$f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ 且$f^{(2k+1)}(0)=0$, $\forall k\geq 0$, 故

$$P_{2n}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{。}$$

下述定理可用來簡化求泰勒多項式的計算。

定理3.2. 設Q_n 爲一n 次多項式, $n\geq 1$。又設f、g 爲二在$x=0$ n 次可微之函數, 且

$$f(x)=Q_n(x)+x^n g(x), \tag{3.14}$$

其中$g(0)=0$。則Q_n 爲f 在0 之n 次泰勒多項式。

證明. 令$h(x)=f(x)-Q_n(x)=x^n g(x)$。則易見$h(0)=0$ 且h 在0 之首n 階導數皆爲0, 因此Q_n滿足(3.8)之條件。故由定理3.1 知$Q_n=P_n$。

例3.3. 經由除法可得下述等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x},\ x\neq 1 \text{。}$$

故(3.14) 成立, 其中

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\ Q_n(x)=1+x+\cdots+x^n,\ g(x)=\frac{x}{1-x}\ \text{。}$$

又$g(0)=0$。故定理3.2 指出f 在0 之n 次泰勒多項式爲$1+x+\cdots+x^n$。

對一n 次可微的函數f, 我們介紹了f 在a 之n 次泰勒多項式P_n。P_n 與f 在a 點之值相同, 且首n 階導數亦相同(見(3.13) 式)。但P_n 究竟與f 不一定相同。若令$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, 則

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

或

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\ \text{。} \tag{3.15}$$

$R_n(x)$ 稱爲f 在a 之第n 次餘項(the nth remainder term of f at a)。(3.15) 稱爲以$R_n(x)$ 爲餘項之f 的泰勒公式(Taylor's formula), 也稱爲f 之一泰勒展開公式, 或簡稱泰勒展式(Taylor's expansion)。如果我們能估計餘項$R_n(x)$ 之大小, 則(3.15) 才較有用。我們想將$R_n(x)$ 以一積分來表示, 然後再估計此積分之大小。我們先給一$n=1$ 的結果。

定理3.3.設函數f 在a 之某一鄰域B 有一連續的二階導數。則對$\forall x\in B$,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R_1(x), \tag{3.16}$$

其中

$$R_1(x)=\int_a^x (x-t)f''(t)dt\ \text{。} \tag{3.17}$$

證明.由(3.15) 得

$$R_1(x)\ =\ f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^x (f'(t)-f'(a))dt \\
&= \int_a^x (f'(t)-f'(a))d(t-x) \\
&= (f'(t)-f'(a))(t-x)|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)f''(t)dt \text{ 。}
\end{aligned}$$

其中第三個等式至第四個等式是用到分部積分 。得證 。

底下爲對一般的n 之結果 。

定理3.4. 設函數f 在a 之某一鄰域B 有一連續的第$n+1$ 階導數 。則對$\forall x \in B$, 我們有下述泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \tag{3.18}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \text{ 。} \tag{3.19}$$

證明. 我們將對n 用歸納法來證, 而$n=1$ 即上一定理 。現設本定理對某整數m 成立, 我們要證明對$m+1$ 亦成立 。

分別對$n=m$ 及$n=m+1$ 寫出(3.15) 式並相減, 得

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} \text{ 。}$$

將R_m 以(3.19) 右側之積分取代(因假設(3.19) 對$n=m$ 成立), 且利用

$$\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} = \int_a^x (x-t)^m dt,$$

得

$$\begin{aligned}
R_{m+1}(x) &= \frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt - \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}\int_a^x (x-t)^m dt \\
&= \frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m (f^{(m+1)}(t) - f^{(m+1)}(a))dt \text{ 。}
\end{aligned}$$

先將上式最後一積分寫成$\int_a^x udv$, 其中

$$u = f^{(m+1)}(t) - f^{(m+1)}(a),\ v = -\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\text{。}$$

然後利用分部積分, 可得(因$t=a$ 時$u=0$, $t=x$ 時$v=0$)

$$\begin{aligned} R_{m+1}(x) &= \frac{1}{m!}\int_a^x udv = -\frac{1}{m!}\int_a^x vdu \\ &= \frac{1}{(m+1)!}\int_a^x (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(t)dt\text{。}\end{aligned}$$

故$n=m+1$ 時本定理成立。由歸納法知本定理對$\forall n\ge 1$ 成立。證畢。

由於泰勒公式中的誤差$R_n(x)$, 可表示成一關於f 之第$n+1$ 階導數的積分, 故若知$f^{(n+1)}$ 之一上、下界, 則可得一$R_n(x)$ 之一上、下界。見下定理。

定理3.5.設f 之第$n+1$ 階導數, 在a之某一鄰域B中為連續, 且滿足對$\forall t\in B$,

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M, \tag{3.20}$$

其中m, M 為二常數。則對$\forall x\in B$,

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le R_n(x) \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{若}\ x>a, \tag{3.21}$$

且

$$m\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \le (-1)^{n+1}R_n(x) \le M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!},\text{若}\ x<a\text{。} \tag{3.22}$$

證明.首先設$x>a$, 則$R_n(x)$ 是一在$[a,x]$ 中之積分(見(3.19) 式)。對$\forall t\in[a,x]$, 因$(x-t)^n\ge 0$, 故由(3.20) 得

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \le \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \le M\frac{(x-t)^n}{n!}\text{。}$$

將上式每一項對t 由a 至x 積分得

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \le R_n(x) \le \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \text{ 。}$$

再將

$$\int_a^x (x-t)^n dt = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

代入上式, 便得證(3.21) 。

若$x < a$, 則$R_n(x)$ 是在$[x, a]$ 中之積分 。對$\forall t \in [x, a]$, $(-1)^n(x-t)^n = (t-x)^n \ge 0$ 。故若將(3.20) 之每一項各乘以$(-1)^n(x-t)^n/n!$, 仍維持不等式關係 。再由x 至a 積分即得(3.22) 。

例3.4.若$f(x) = \sin x$ 且$a = 0$, 則有$f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x)$, 且

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x) \text{ 。}$$

因$f^{(2n+1)}(t)$ 可能等於$\cos t$ 或$-\cos t$, 故$|f^{(2n+1)}(t)| \le 1$ 。即M 可取爲1, m 可取爲-1 。故對$\forall x > 0$, 由(3.21) 得

$$|R_{2n}(x)| \le \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ 。}$$

有許多看似簡單的函數, 並無法積出來, 也就是無法以一初等函數(elementary function, 諸如多項式 、有理式 、三角函數 、反三角函數 、指數 、對數及這些函數的四則運算或合成, 便稱爲初等函數) 來表示 。例如,

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx, \ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx,$$

由於$\sin x/x$ 在$x = 0$ 無定義, 若在$x = 0$ 我們以1 取代$\sin 0/0$, 則此函數在$x = 0$ 亦連續, 因此在$[0, 1]$ 的積分便有意義了(以後若遇到類似情況之函數, 我們也會如此處理) 。藉由多項式來逼近函數, 便可

用來求這些無法以初等函數來表示的積分之近似值。

例3.5. 求$\int_0^1 \sin x^2 dx$ 之近似值。由上例知(取$n=4$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_8(x) \text{。}$$

因$f^{(9)}(x) = \sin x$, 故在$x \in [0,1]$, $0 \le f^{(9)}(x) \le \sin 1 \le 1$。因此

$$0 \le R_8(x) \le \frac{x^9}{9!} \text{。}$$

故

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + R_8(x^2),$$

且

$$0 \le R_8(x^2) \le \frac{x^{18}}{9!} \text{。}$$

因

$$0 \le \int_0^1 R_8(x^2)dx \le \int_0^1 \frac{1}{9!} x^{18} dx = \frac{1}{19 \cdot 9!},$$

故

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \theta,$$

其中

$$0 \le \theta \le \frac{1}{19 \cdot 9!},$$

誤差可說已非常小。

泰勒展式中的餘項雖已給在(3.19) 式, 但尚有一些其他的表示法。首先因(3.19) 右側積分算子中的$(x-t)^n$, 在積分區間中皆未變號, 且又假設$f^{(n+1)}$ 在此區間中爲連續, 故由第二章定理4.11 積分之加權均值定理, 得

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

其中ξ 爲某介於以a, x 爲端點之閉區間中的某點(注意, a 與x 不一定那一個大) 。因此餘項可寫成

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{3.23}$$

而

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ 。} \tag{3.24}$$

(3.23) 式稱爲Lagrange 形式之餘項(Lagrange's form of the remainder 。R_n 寫成這種形式, 看起來與泰勒公式中的前面的項很相似(見(3.18) 式), 只不過$f^{(n+1)}$ 要代入在某點ξ 而非a 。又ξ 當然與a, x 及f 有關 。

不過, 適當地利用柯西均值定理(見本章定理1.5), 可以不需假設$f^{(n+1)}$ 爲連續, 便可將R_n 寫成(3.23) 式, 證明其實不太複雜, 有興趣的讀者可參考Apostol (1967) pp. 283–284, 該處並給另一餘項的表示法(稱爲柯西形式) 。

另外, 若$a = 0$, 則得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{3.25}$$

其中ξ 介於0 與x 間 。此特別形式的泰勒展式稱之爲Maclaurin 公式(Maclaurin's formula, Maclaurin (1698–1746) 爲蘇格蘭的(Scotch) 數學家, 與泰勒同一時代 。他在西元1742 年給出後來以他名字命名的公式 。不過早於他25 年, 此公式便已在Stirling 的一篇著作中出現) 。

本節最後我們介紹所謂o-記號(o-notation, 讀做the little-oh notation)。

設函數f 在a 之某一鄰域B有一連續的第$n+1$ 階導數, 此時

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \text{ ,} \forall x \in B \text{ 。}$$

現設$x \in [a-c, a+c] \subset B$, 其中$c > 0$, 則由$f^{(n+1)}$ 在此閉區間中仍爲連續, 得$f^{(n+1)}$ 在此閉區間中爲有界(第一章定理6.4) 。即存在一常數$M > 0$, 使得

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M, \ \forall t \in [a-c, a+c] \text{ 。}$$

故(3.19) 之餘項滿足

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall x \in [a-c, a+c] \text{ 。}$$

因此

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \right| &\leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|, \\ &\quad \forall x \in [a-c, a) \cup (a, a+c] \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.26}$$

故若令$x \to a$, 則$R_n(x)/(x-a)^n \to 0$ 。我們稱此爲$x \to a$ 時, $R_n(x)$ 的位階(order) 低於$(x-a)^n$ (讀做$R_n(x)$ is of smaller order than $(x-a)^n$ as $x \to a$) 。

也就是在前述條件下, 當x 很接近a 時, $f(x)$ 可以一$x-a$ 的n 次多項式來逼近, 且誤差的位階低於$(x-a)^n$ 。我們可以這樣想, 例如, 當$x \to 0$ 時, $x^2 \to 0$ 且$x^3 \to 0$ 。但x^3 接近0 的速度快過x^2 (當$x = 0.1$ 時, $x^2 = 0.01$ 而$x^3 = 0.001$ 遠小於0.01) 。雖同樣趨近至0, 我們仍可以比較其速度 。x^2 與$2x^2$ 顯然速度是“同一等級” 的快, x^2 又比x 快 。所以$R_n(x)$ 的位階小於$(x-a)^n$, 當$x \to a$ 。即是說$x \to a$ 時, $R_n(x)$ 往0 跑的速度快過$(x-a)^n$ 。若$R_n(x)$ 可寫成$x-a$ 的乘冪, 則$R_n(x)$ 的次方就必須大於n 。當然R_n 不一定是一$x-a$ 的乘冪 。

關於位階, 在5.8 節我們會再做一些補充 。爲了方便, 我們引進Landau (1877−1938) 在西元1909 年介紹的o-記號 。

定義3.1. 設當x 屬於a 的某鄰域, $g(x) \neq 0$, 只要$x \neq a$ 。則

$$f(x) = o(g(x)), \ x \to a, \tag{3.27}$$

表

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0\text{ 。}\tag{3.28}$$

在上述定義中, a 也可以是∞ 或$-\infty$ 。只要x 夠大時, $g(x)\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

便可寫成

$$f(x)=o(g(x)),\ x\to\infty\text{ 。}$$

符號$f(x)=o(g(x))$ 讀做$f(x)$ is little-oh of $g(x)$, 或$f(x)$ is of smaller order than $g(x)$, 其涵意爲當x 很接近a 時, 與$g(x)$ 相比$f(x)$ 很小 。

例3.6.(i) $x^2=o(x)$, $x\to 0$;

(ii) $\sin^2 x=o(x)$, $x\to 0$;

(iii) $f(x)=o(1)$, $x\to a$, 若且唯若$f(x)\to 0$, 當$x\to a$;

(iv) $f(x)=o(x^n)$, $x\to a$, 若且唯若$f(x)/x^n\to 0$, 當$x\to a$ 。

我們也常有諸如下式的寫法:

$$f(x)=h(x)+o(g(x)),\ x\to a,$$

此即

$$\frac{f(x)-h(x)}{g(x)}\to 0,\ x\to a\text{ 。}$$

也就是$f(x)-h(x)=o(g(x))$, $x\to a$ 。例如, 因

$$\frac{\sin x-x}{x}=\frac{\sin x}{x}-1\to 0,\ x\to 0,$$

故$\sin x=x+o(x)$ 。

例3.7.因$x\to\infty$ 時, $x^2/x^3\to 0$, 故$x^2=o(x^3)$, $x\to\infty$ 。

若把o-記號引入泰勒展式中, 且利用前面已指出的$R_n(x)/(x-$

$a)^n \to 0$, 則$f(x)$ 可寫成

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n),\ x \to a, \tag{3.29}$$

只要$f^{(n+1)}$ 在包含a 的某閉區間連續。由(3.29) 可看出, 當x 很接近a 時, $f(x)$ 近似於一$x-a$ 的n 次多項式, 且誤差與$(x-a)^n$ 相比很小。

底下爲依據我們之前處理過的泰勒展式而有的結果。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),\ x \to 0 \text{ 。}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\quad x \to 0 \text{ 。}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\quad x \to 0 \text{ 。}$$

要留意的是, 設有一函數g, 則$o(g(x))$ 並非一特定的函數, 而是某一與$g(x)$ 相比很小的函數。所以$x^2 = o(x)$, 且$x^3 = o(x)$, 但不能因此得到$x^2 = x^3$。有時我們會較謹慎地區分, 而寫成$x^2 = o_1(x)$, $x^3 = o_2(x)$。但通常只要弄清楚o 只是一記號, $o(x)$ 有其特殊的意思, 則便可省去o_1, o_2 中的足標(subscript) 1 及2。

對於o-記號, 我們列出一些常見的有關其運算的結果。

定理3.6. 當$x \to a$ 時,

(i) $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$;

(ii) $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$;

(iii) $o(cg(x)) = o(g(x))$, 若$c \neq 0$;

(iv) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$;

(v) $o(o(g(x))) = o(g(x))$;

(vi) $\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + o(g(x))$, 若$x \to a$ 時, $g(x) \to 0$。

證明.先證(i)。即設$f_1(x)=o(g(x))$, $f_2(x)=o(g(x))$。則當$x\to a$時,

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g(x)}+\frac{f_2(x)}{g(x)}\to 0+0=0,$$

故得證$f_1(x)+f_2(x)=o(g(x))$。

(ii)$-$(v) 之證明類似(i), 留給讀者。次證(vi)。先寫出下述等式:

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u\cdot\frac{u}{1+u}\text{ 。}$$

再以$u=g(x)$ 代入上式, 因$x\to a$ 時, $g(x)\to 0$, 故

$$\frac{g(x)}{1+g(x)}\to 0,\ \text{當 } x\to a\text{ 。}$$

因此(vi) 得證。

例3.8.試證$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, 當$x\to 0$。

證明.因

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3),\ x\to 0,$$

故利用定理3.6 之(vi), 取$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}=1+\frac{1}{2}x^2-o(x^3)+o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))\\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ x\to 0\text{ 。}\end{aligned}$$

此處用到

$$\frac{-o(x^3)}{x^2}=-\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x\to 0,$$

故$-o(x^3)=o(x^2)$, 且

$$\begin{aligned}\frac{o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))}{x^2} &= \frac{o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))}{-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{x^2}\\ &\to 0\cdot(-\frac{1}{2}+0)=0,\end{aligned}$$

故 $o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))=o(x^2)$, 又$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$。

因此

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

其中最後一等號成立留給讀者自行驗證。

習 題 4.3

在1 − 5 題, 對所給的函數f 、n 及a, 寫出f 在a 之n 次泰勒多項式$P_n(x)$ 。

1. $f(x) = \cos x, n = 5, a = \pi/2$ 。
2. $f(x) = \sec x, n = 3, a = \pi/5$ 。
3. $f(x) = \sqrt{1+x}, n = 5, a = 0$ 。
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, n = 4, a = 0$ 。
5. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, n = 4, a = 0$ 。

在6 − 10 題, 令$T_n(f(x))$ 表函數$f(x)$ 在0 之n 次泰勒多項式。試證各題中之等式。

6. $T_n(\frac{1}{1+x}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$ 。
7. $T_{2n+1}(\frac{x}{1-x^2}) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$ 。
8. $T_n(\frac{1}{2-x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ 。
9. $T_n((1+x)^\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$, 其中$\alpha$ 爲一有理數, 且

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} 。$$

10. $T_{2n}(\sin^2 x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$ 。(提示: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$)

在11 − 13 題, 對所給的n 寫出各函數之Maclaurin 公式 。

11. $f(x) = \sin x, n = 6$ 。

12. $f(x) = \tan x, n = 4$ 。

13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, n = 4$ 。

14. 試證

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n}(x),\ 其中|R_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\ 。$$

15. 試證

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+1}(x),\ 其中|R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\ 。$$

16. 試證Maclaurin 公式與泰勒展式等價, 即其中任一均可導出另一 。

17. 試證存在一$c \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^1 \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx = 1 + \frac{c}{31}\ 。$$

18. 試證

$$0.493948 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}dx < 0.493958\ 。$$

19. 試以$\sin x = x - x^3/3! + R_4(x)$ 求$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sin x^2 dx$ 之一近似值, 並給出誤差之範圍 。

20. 試以$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + R_6(x)$ 求$\int_0^1 \sin x/x dx$ 之一近似值, 並給出誤差之範圍(如前在$x = 0$ 仍以1 取代$\sin x/x$) 。

21. 試證存在一三次多項式$P(x)$, 使得

$$x\cos x = P(x) + o((x-1)^3), x \to 1 \text{ 。}$$

22. 找出一最低次的多項式$P(x)$, 使得

$$\sin(x-x^2) = P(x) + o(x^6), x \to 0 \text{ 。}$$