第四章

微分之應用

4.2 求極值及繪圖

在1.3 節我們曾定義單調函數, 利用導數可判別函數之單調性, 見下定理 。

定理2.1. 設函數f 在一區間I 連續 。

(i) 若對$\forall x \in I$, 且x 不爲I 之端點, $f'(x) > 0$, 則f 在I 中爲嚴格漸增;

(ii) 若對$\forall x \in I$, 且x 不爲I 之端點, $f'(x) < 0$, 則f 在I 中爲嚴格漸減 。

證明. 我們只證(i), (ii) 之證明類似 。

設$x_1, x_2 \in I$, 且$x_1 < x_2$ 。則由均值定理, 存在一$c \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \text{ 。}$$

因$x_2 > x_1$, 且由假設$f'(c) > 0$, 故$f(x_2) > f(x_1)$ 。得證 。

在上定理中, 若(i) 中之條件$f'(x) > 0$ 改爲$f'(x) \geq 0$, 則得f 在I 中爲漸增; 若(ii) 中之條件$f'(x) < 0$ 改爲$f'(x) \leq 0$, 則得f 在I 中爲

漸減。

另外, 設一函數f 在區間I 中連續, 且在I 中除了有可能在端點外, 皆無臨界點。則由定理1.2, 對$\forall x \in I$ 且x 不爲端點, $f'(x) > 0$ 或$f'(x) < 0$。此結果再加上定理2.1, 便得下述定理。

定理2.2.設函數f 在一區間I 連續, 且在I 中除了有可能在端點外, 皆無臨界點, 則f 在I 中爲嚴格單調。

對一連續函數f, 一旦我們找出它所有的臨界點, 則f 在那些區間是單調, 便都可決定。例如, 設$a < b$ 爲f 之二相繼的臨界點, 且f 在$[a,b]$ 連續。則由定理2.2 得:

(i) 若$f(a) < f(b)$, 則f 在$[a,b]$ 嚴格漸增;

(ii) 若$f(a) > f(b)$, 則f 在$[a,b]$ 嚴格漸減。

讀者是否看出爲什麼不考慮$f(a) = f(b)$ 的情況? 事實上由Rolle定理立即看出此時$f(a) \neq f(b)$。又定理2.2 也適用區間不爲有限的情況, 由底下的例子可看出。

例2.1.找出函數$f(x) = x^3 - 3x + 1$ 爲單調之區間。

解.首先f 之導數爲$f'(x) = 3x^2 - 3$, 因此$x = 1, -1$ 爲f 之臨界點。再列出下表。

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3

可看出$f(-2) < f(-1)$, $f(-1) > f(1)$, $f(1) < f(2)$。又f 在$(-\infty,-1)$ 及$(1,\infty)$ 中皆無臨界點, 且$f(-2) < f(-1)$, $f(2) > f(1)$, 故由定理2.2, f 在$(-\infty,-1]$ 中爲嚴格漸增, 在$[1,\infty)$ 中爲嚴格漸增。因$f(-1) > f(1)$, 故f 在$[-1,1]$ 中爲嚴格漸減。

在上例中, 我們決定了f 之漸增及漸減的範圍。對一函數, 最能了解其行爲的, 莫過於繪出其圖。我們陸續會討論如何能使圖形較精確地被繪出, 不過由例2.1 中的結論, 便可得f 之圖形大約如

圖2.1 。

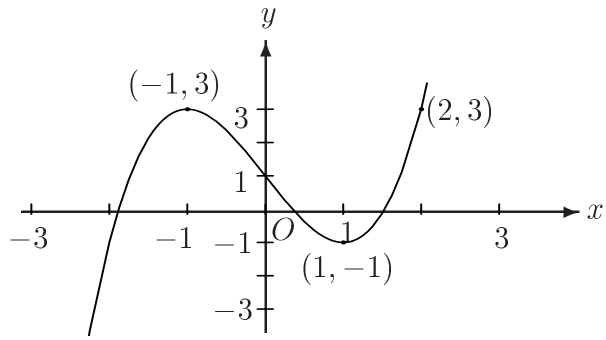


圖2.1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 之圖形

再看一例 。

例2.2.設$f(x) = x + 4/x^2$ 。求使f為單調之區間, 並繪f 之圖形 。

解.首先f 之定義域爲$R\setminus\{0\}$, 且爲一連續函數 。又$f'(x) = 1-8x^{-3}$, $x \neq 0$ 。可看出$f'(x) = 0$ 若且唯若$x = 2$, 即2 爲f 唯一之臨界點 。故由定理2.2, f 在$(-\infty, 0)$, $(0, 2]$, $[2, \infty)$ 皆爲嚴格單調 。又因$f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$, $f'(3) > 0$, 故由定理2.1 知, f 在$(-\infty, 0)$ 中爲嚴格漸增, 在$(0, 2]$ 中爲嚴格漸減, 在$[2, \infty)$ 中爲嚴格漸增 。

又$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, 故$x = 0$ 爲一垂直漸近線 。又當$|x|$ 很大時, $f(x)$ 很接近x, 即$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-x)= \lim_{x\to\infty}(f(x)-x)= 0$, 因此$y = x$ 爲一斜漸近線(若$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(mx+b)) = 0$ 或$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b)) = 0$, 則直線$y = mx + b$ 稱爲$y = f(x)$ 之圖形的一斜漸近線) 。f 之圖形如圖2.2 。

由圖2.1 可看出若$f(x) = x^3 - 3x + 1$, 則f 在$x = -1$ 有一相對極大, 在$x = 1$ 有一相對極小, 且極大 、極小值分別爲3 及−1 。至於f 並無絕對極值 。由圖2.2 可看出若$f(x) = x + 4/x^2$, 則在$x = 1$ 有一相對極小, 且f 並無相對極大及絕對極值 。一般而言,. 可利用定理2.1 來求極值 。我們將結果敘述如下 。

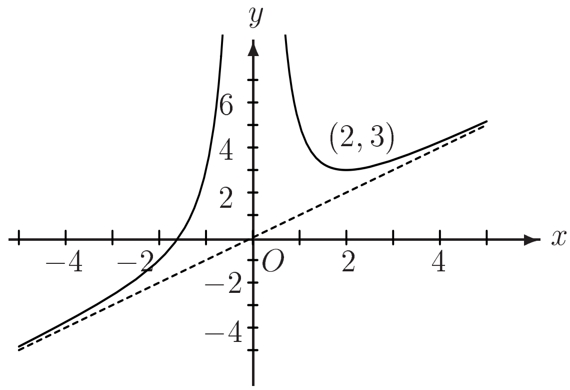


圖2.2. $f(x) = x + 4/x^2$ 之圖形

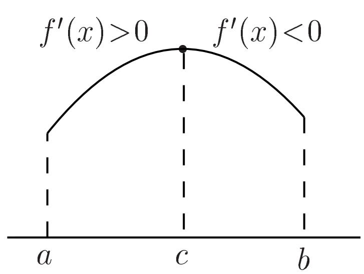
定理2.3. 設連續函數f 在開區間(a,b), 除了可能在c 外, 皆可微。

(i) 若$f'(x) > 0$, $\forall x < c$, $f'(x) < 0$, $\forall x > c$, 則f 在c 有一相對極大;

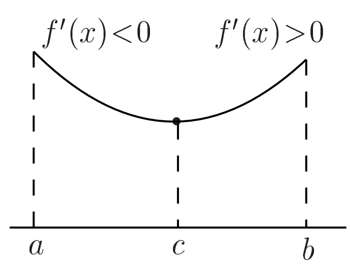
(ii) 若$f'(x) < 0$, $\forall x < c$, $f'(x) > 0$, $\forall x > c$, 則f 在c 有一相對極小。

證明. 在(i) 的情況, 由定理2.1 知f 在(a,c) 嚴格漸增, 且在(c,b) 嚴格漸減。因此對$\forall x \in (a,b)$ 且$x \neq c$, $f(x) < f(c)$。故f 在c 有一相對極大。同理可證(ii)。

定理2.3 可以圖2.3 來説明, 對一可微函數, 導數改變正負號處, 就會有極值產生。



(a) 在c 有極大



(b) 在c 有極小

圖2.3. 極值發生處附近之圖形

所以欲求函數f 之極值, 其步驟如下 。

(i) 找出 f 之所有臨界點及邊界點, 以A 表這些點之集合 。

(ii) 設 $c \in A$, 找出一c 之鄰域(a, b), 使得f 在$[a, b] \cap D$ 爲連續, 其中D 爲f 之定義域, 且$[a, b] \cap A = \{c\}$, 即在$[a, b]$ 中, c 爲f 唯一之臨界點或邊界點 。

(iii) 分別計算$f(a)$ 、$f(b)$ 及$f(c)$ 。先設c 不爲邊界點 。

(1) 若$f(a) < f(c)$ 且$f(b) < f(c)$, 則f 在c 有一相對極大;

(2) 若$f(a) > f(c)$ 且$f(b) > f(c)$, 則f 在c 有一相對極小 。

(3) 若上述二種情況皆未發生, 則f 在c 無極植 。

至於若c 爲邊界點, 當c 爲左邊界點只要比較$f(b)$ 與$f(c)$ 之大小; 當c 爲右邊界點只要比較$f(b)$ 與$f(c)$ 之大小即可 。

上述步驟(iii) 又可以下述(iii)$'$ 取代 。

(iii)$'$ 分別計算$f'(a)$ 及$f'(b)$ 。

(1) 若$f'(a) > 0$ 且$f'(b) < 0$, 則f 在c 有相對極大;

(2) 若$f'(a) < 0$ 且$f'(b) > 0$, 則f 在c 有相對極小;

(3) 若上述二情況皆未發生, 則f 在c 無極植 。

至於若c 爲邊界點, 當c 爲左邊界點只要看$f'(b)$ 之正負; 當c 爲右邊界點只要看$f'(a)$ 之正負 。

底下給幾個例子 。

例2.3. 令$f(x) = x^3$, 則$f'(x) = 3x^2$, 0 爲f 唯一之臨界點 。因$f'(x) > 0, \forall x \neq 0$, 故$0$ 並非f 之極值 。事實上f 爲一嚴格漸增函數, 並無極值存在 。

例2.4. 設$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, 求f 之相對極值 。

解. 首先$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, 因此$-2$, 0 爲f 之臨界點 。又$f'(x) > 0, \forall x < -2$, $f'(x) < 0, \forall -2 < x < 0$, $f'(x) > 0, \forall x > 0$, 故由定理2.3, f 在-2 有一相對極大, f 在0 有一相對極小 。經求出$f(-2) = 3$, $f(0) = -1$, 可得f 之圖形如圖2.4 。

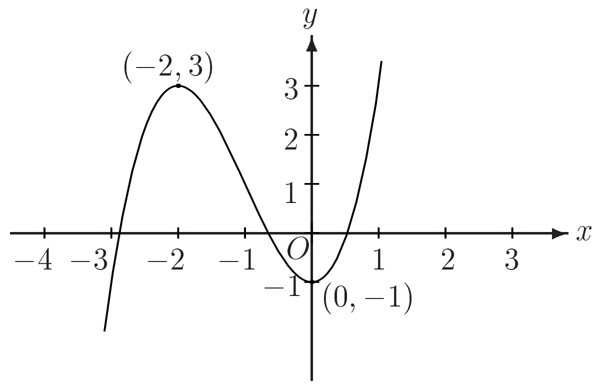


圖2.4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 之圖形

例2.5.設$f(x) = x^3 + 3x^{-1}$, 求f 之漸近線及相對極值並繪其圖 。

解.當$x \to 0+$ 時, $f(x) \to \infty, x \to 0-$ 時, $f(x) \to -\infty$, 故$x = 0$ 爲垂直漸近線 。其次$f'(x) = 3x^2 - 3x^{-2} = 3(x^4 - 1)/x^2$ 。得-1, 1 爲f 之臨界點 。又$f'(x) > 0, \forall x < -1$, $f'(x) < 0, \forall 0 < x < 1$, $f'(x) < 0, \forall 0 < x < 1$, $f'(x) > 0, \forall x > 1$ 。故f 在-1 有相對極大, 在1 有相對極小 。且$f(-1) = -4$ 及$f(1) = 4$ 分別爲相對極大值及相對極小值 。f 之圖形如圖2.5 。

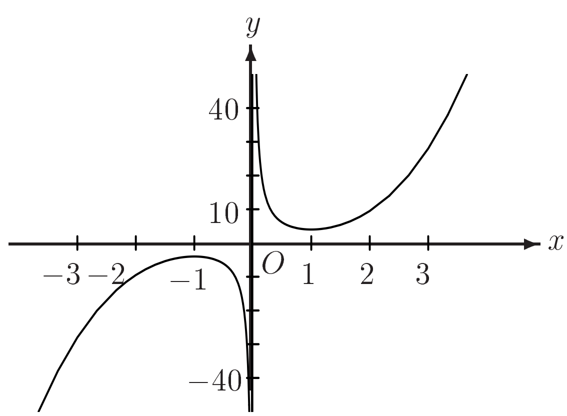
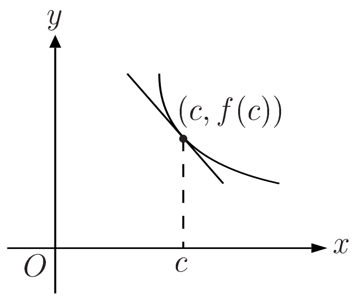


圖2.5. $f(x) = x^3 + 3x^{-1}$ 之圖形

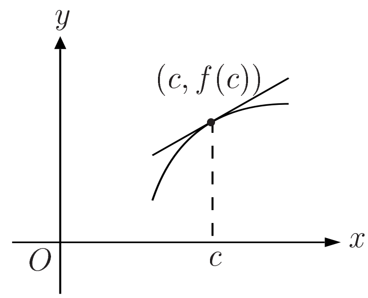
在第二章定義6.1, 我們曾給凸函數及凹函數的定義 。我們再給一相關的定義如下 。

定義2.1.函數f 之圖形稱爲在$(c, f(c))$ 爲上凹(concave upward), 若$f'(c)$ 存在, 且存在c 之一去心鄰域D, 使得f 在D 中之圖形皆在過$(c, f(c))$ 之切線的上方。同理可定義下凹(concave downward)。

上凹及下凹之圖形大致如圖2.6。



(a) 在$(c, f(c))$ 爲上凹



(b) 在$(c, f(c))$ 爲下凹

圖2.6. 上凹及下凹之圖形

可看出對一可微函數f, 若在某區域中爲凸(凹)函數, 則f 之圖形在此區域中爲上凹(下凹)。了解函數之凹凸性, 可使我們能精確地繪圖。底下爲一判別定理。

定理2.4.設函數f 在c 之某一鄰域可微。

(i) 若$f''(c) > 0$, 則f 之圖形在$(c, f(c))$ 爲上凹;

(ii) 若$f''(c) < 0$, 則f 之圖形在$(c, f(c))$ 爲下凹。

證明.設$f''(c) > 0$, 即$f'(x)$ 在c 之一鄰域中爲增函數。則存在c 之一鄰域N, 使得對$\forall x \in N$, $f'(x) < f'(c)$, 若$x < c$; $f'(x) > f'(c)$, 若$x > c$。又由均值定理(定理1.4) 得, 存在一ξ 介於x 與c 之間, 使得

$$\begin{aligned} & f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \\ = & f'(\xi)(x-c) - f'(c)(x-c) \end{aligned}$$

$$= (f'(\xi) - f'(c))(x - c) \text{。}$$

令$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$。對$\forall x \in N$, 若$x > c$, 則$c < \xi < x$,因此$f'(\xi) > f'(c)$, 且$g(x) > 0$; 若$x < c$, 則$x < \xi < c$, 因此$f'(\xi) < f'(c)$, 此時仍有$g(x) > 0$。即得對$\forall x \in N$ 且$x \neq c$, $g(x) > 0$。

因$y = f(c)+f'(c)(x-c)$ 爲過$(c, f(c))$ 之切線, $(x, f(c)+f'(c)(x-c))$ 爲切線上一點, 而$(x, f(x))$ 爲f 之圖形上的一點, 若$f(x) > f(c)+f'(c)(x-c)$, 表f 在x 之圖形在切線的上方。因此若對$\forall x \in N$ 且$x \neq c$, $g(x) > 0$, 則f 之圖形在$(c, f(c))$ 爲上凹。得證(i)。

同理可證(ii)。

底下定理爲定理2.4 之一推論, 此爲利用二階導數來判別極值(second derivative test for extrema)。

定理2.5.設$f'(c) = 0$ 且f 在c 之一鄰域可微。

(i) 若$f''(c) < 0$, 則f 在c 有一相對極大;

(ii) 若$f''(c) > 0$, 則f 在c 有一相對極小。

證明.因$f'(c) = 0$, 故f 之圖形在c 有一水平切線。若$f''(c) < 0$, 則由定理2.4, f 之圖形在c 之附近爲下凹, 即在c 附近$f(x) < f(c)$, 故f 在c 有一相對極大。得證(i)。至於(ii) 亦同理可證。

若$f'(c) = 0$ 且$f''(c) = 0$, 則上定理便不適用來判別極值。這時可能要利用定理2.3, 這是較基本的定理, 不用假設二階導數存在。本節最後會再討論$f''(c) = 0$ 的情況。

由二階導數之正負, 亦可判別函數之凹凸性。見下定理。

定理2.6.設f 在閉區間$[a, b]$ 連續, 在開區間(a, b) 可微。若f' 在(a, b) 漸增, 則f 在$[a, b]$ 爲凸函數。特別地, 若f'' 在(a, b) 中存在且非負, 則f 爲凸函數。

證明.在$[a, b]$ 中取$x < y$。令$z = \alpha y + (1 - \alpha)x$, 其中$0 < \alpha < 1$。我

們須證明

$$f(z) \le \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \text{。}$$

又因$f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z)$, 故即等價於要證明

$$(1-\alpha)(f(z) - f(x)) \le \alpha(f(y) - f(z)) \text{。}$$

由均值定理, 存在$\xi \in (x,z)$, $\eta \in (z,y)$, 使得

$$f(z) - f(x) = f'(\xi)(z-x), \text{ 且 } f(y) - f(z) = f'(\eta)(y-z) \text{。}$$

因f' 爲漸增, 且$\xi < \eta$, 故$f'(\xi) \le f'(\eta)$ 。又可驗證$(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$ 。故得

$$\begin{aligned} (1-\alpha)(f(z) - f(x)) &= (1-\alpha) f'(\xi)(z-x) \\ &\le \alpha f'(\eta)(y-z) \\ &= \alpha(f(y) - f(z)) \text{。} \end{aligned}$$

得證f 爲凸函數 。

至於若$f'' \ge 0$, 則f' 爲漸增, 故最後一部分也得證 。

我們還有一名詞要介紹, 即反曲點(points of inflection) 或稱拐點 。

定義2.2.設有一函數f, 若存在c 之一鄰域(a,b) 使得$f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,c)$, $f''(x) < 0$, $\forall x \in (c,b)$ (或反過來$f''(x) < 0$, $\forall x \in (a,c)$, $f''(x) > 0$, $\forall x \in (c,b)$), 則$(c, f(c))$ 稱爲f 圖形之一反曲點, 或稱f 在c 有一反曲點 。

若f 在c 有一反曲點, 且$f''(c)$ 存在, 則必有$f''(c) = 0$ 。原因如下 。設(a,b) 爲如定義2.2 中所述c 之一鄰域, 且令$g = f'$ 。因$f''(x)$ 存在, 故$g'(x)$ 存在, $\forall x \in (a,b)$ 。因此g' 在$\forall x \in [\xi, \eta]$ 連續, 其中$\forall a < \xi < c < \eta < b$, 且$g'(\xi) g'(\eta) < 0$ 。故由定理1.2, g 在(ξ, η) 中有臨界點 。由於對$\forall x \in (a,c) \cup (c,b)$, $g'(x)$ 存在且不爲0, 故此臨界

點必爲c。且因$g'(c) = f''(c)$ 存在, 故此臨界點不爲g' 不存在的點, 即$g'(c) = f''(c) = 0$。亦即若f 在反曲點c 之二階導數存在, 則此c 爲f' 之臨界點, 即$f''(c) = 0$。

但並非每一f' 之臨界點皆會使f 有反曲點。例如, 設$f(x) = x^4$, 則$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$。因$f''(0) = 0$, 故0 爲f' 之一臨界點。但$f'(x) > 0, \forall x \neq 0$, 故$f$ 在0 無反曲點。

例2.6.設$f(x) = x^3 - 3x^2$, 求f 之相對極值及反曲點, 並繪其圖。

解.首先$f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$, $f''(x) = 6x-6 = 6(x-1)$。故0 及2 爲f 之臨界點。又因$f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$, 故f 在0 有相對極大值$f(0) = 0$, f 在2 有相對極小值$f(2) = -4$。因$f''(x) = 0$之唯一解爲$x = 1$, 故$x = 1$ 爲唯一有可能使f 有反曲點處。而因$f''(x) > 0, \forall x > 1$, $f''(x) < 0, \forall x < 1$, 故由定義2.2, f 在1 有反曲點。f 之圖形如圖2.7。

在微積分裡, 主要是處理函數, 討論函數的各種性質。前面已提過對一函數, 最能了解它的, 莫過於繪出其圖形。所以底下我們描述繪圖的一些步驟。

1. 首先決定漸近線。垂直漸近線將圖形分隔成數個部分, 形成各自獨立的幾個區域; 水平漸近線則可看出"最終" (即$x \to \infty$ 或$x \to -\infty$), 圖形的大致高度; 若有斜漸近線亦找出, 表示最終x 會貼近該直線。

2. 決定極值。這是函數的局部最高處及最低處。在極值附近, 圖形大致情形見圖2.8。

除了邊界點外, 在極值的導數爲0 或不存在(即臨界點), 此由圖2.8 可看出。一般而言, 若在某點函數之導數存在, 則在該點附近圖形會較平滑, 若導數不存在, 可能不連續(如$f(x) = [x]$, 在$x = 1$), 或右導數及左導數皆存在但不相等(此時在該點圖形較尖銳, 如$f(x) = |x|$, 在$x = 0$), 或有一單側導數趨近至∞ 或$-\infty$ (此時在該點垂直x 軸之直線可視爲其"切線", 如$f(x) = x^{1/3}$, 在$x = 0$)。

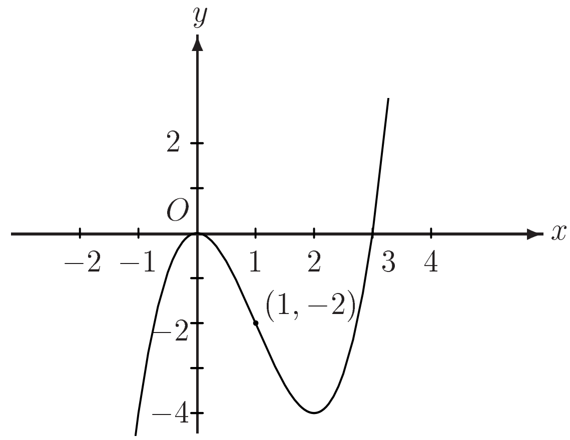
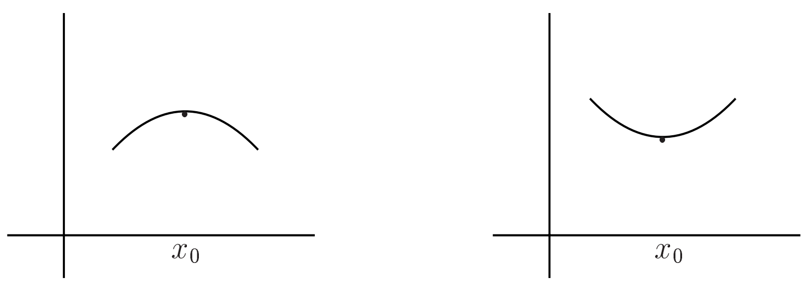


圖2.7. $f(x) = x^3 - 3x^2$ 之圖形



(a) 極大值

(b) 極小值

圖2.8. 極值附近函數的圖形

所以欲決定極值, 先找出臨界點。如果在某一臨界點c, 函數f二次可微且$f''(c) \neq 0$, 則依定理2.5 判別極大或極小。若$f''(c) = 0$, 則可利用定理2.3 來判別。我們以後也會再討論$f''(c) = 0$ 的情況。

3. 決定反曲點。由圖2.8 可看出, 在極大值之左、右側圖形往下延伸, 若無變化, 會無限延伸下去。反曲點就是改變圖形的型態。在反曲點附近的圖形大致有下述四類。

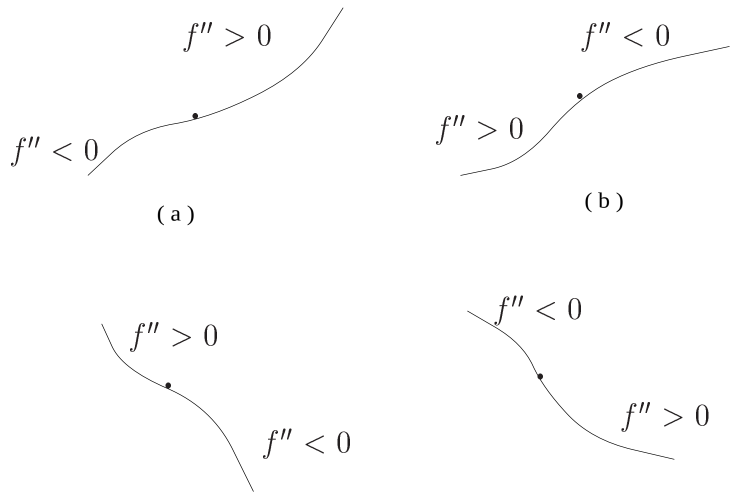


圖2.9. 反曲點附近函數的圖形

其中(a) 及(b) 類$f' > 0$, 即函數爲漸增; (c) 及(d) 類$f' < 0$, 即函數爲漸減。$f'' > 0$ 表f' 爲漸增即圖形之斜率愈來愈大, $f'' < 0$ 則反之。當$f'' > 0$, 如果是漸增函數, 表圖形會愈來愈陡(因斜率變大); 如果是漸減函數, 表圖形會愈來愈平緩(因斜率由負值漸漸增大, 所以絕對值變小)。$f'' < 0$ 也可有類似的討論。若在某一點的左、右側f'' 符號相反, 則該點爲反曲點(定義2.2)。而由定義2.2 之後的討論知, 若在某反曲點c, $f''(c)$ 存在, 則必有$f''(c) = 0$。這也提供我們一個找反曲點的方式, 先找出會使二階導數爲0 的點, 再判別在該點是否會有反曲點。由圖2.9 可明顯看出反曲點的存在是很自然的。如在圖2.9(a) 中, 若圖中之黑點非反曲點, 則在黑點之左側, 圖形雖愈來愈增高, 但走勢愈來愈緩慢, 在黑點達到最高處, 若無變化, 過了黑點便要往下了。而黑點便彷彿阻止圖形往下, 圖形扭轉要往下的走勢, 使其仍然上升, 且上升速度增快(因$f'' > 0$)。同理可解釋其他三種情況。

由圖2.9 也可看出, 對一連續函數, 在二相鄰的非邊界的極值間(此二相鄰的極值必定一爲極大, 一爲極小, 爲什麼?), 必恰有一反曲點存在。

決定反曲點將可使圖形畫得較精確。

4. 求出x 軸及y 軸之截距。即若有$y = f(x)$, 找出會使$y = 0$ 之x, 即爲圖形通過x 軸處, 及求出$f(0)$, 即圖形通過y 軸處。也可描繪出在一些x 值處y 之值, 如此圖形會更精確。

記住一個原則, 在某點之右側或左側, 若無變化(如臨界點、反曲點或漸近線), 則圖形就一直順勢進行下去(往上或往下)。例如, 設$y = x^2$, 此爲一到處可微的函數。在$x = 0$ 有一極小, 所以在$x = 0$ 附近, 圖形如圖2.3 (b)。又在$x > 0$ 處, 無任何變化, 所以圖形不斷上升至∞; 在$x < 0$ 處, 也無任何變化, 所以隨著x 變小, 圖形也一直上升至∞。

底下再給出幾個例子。所謂繪圖便包含找出漸近線、臨界點及反曲點。

例2.7.試繪$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 之圖形。

解.首先$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$, 所以0, 3 爲臨界點。又$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, 所以在$x = 0, 2$ 可能有反曲點。

因$f''(3) > 0$, 故在$x = 3$ 有相對極小值$f(3) = 81 - 108 + 10 = -17$。但$f''(0) = 0$, 故二階導數之判別極值法失效。因在$x = 0$ 之左、右一鄰域, f' 皆爲負, 故在$x = 0$ 無極值。又在$x = 0$ 之左、右一鄰域, f'' 符號相反, 在$x = 2$ 之附近, f'' 之符號亦相反, 故$(0, f(0))$ 及$(2, f(2))$ 皆爲反曲點, 而$f(0) = 10$, $f(2) = -6$。

圖形並無漸近線(此爲多項式), $x \to \infty$ 時$f(x) \to \infty$, $x \to -\infty$ 時, $f(x) \to -\infty$。$x = 0$ 時, $f(0) = 10$, 而x 軸之截距爲滿足$x^4 - 4x^3 + 10 = 0$ 之x 值, 並不易解出, 但可由勘根定裡(第二章定理6.2) 找出近似值。f 之圖形如圖2.10。

例2.8.試繪$f(x) = x + 1/x$ 之圖形。

解.f 之定義域爲$R \setminus \{0\}$。$x \to 0+$ 時, $f(x) \to \infty$, $x \to 0-$ 時, $f(x) \to -\infty$, 故$x = 0$ 爲垂直漸近線。又$x \to \infty$ 時, $(f(x) - x) \to 0$, $x \to -\infty$ 時, $(f(x) - x) \to 0$, 故$y = x$ 爲斜漸近線。

因$f'(x) = 1 - 1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$。故在$x = 1, -1$ 有臨界點。

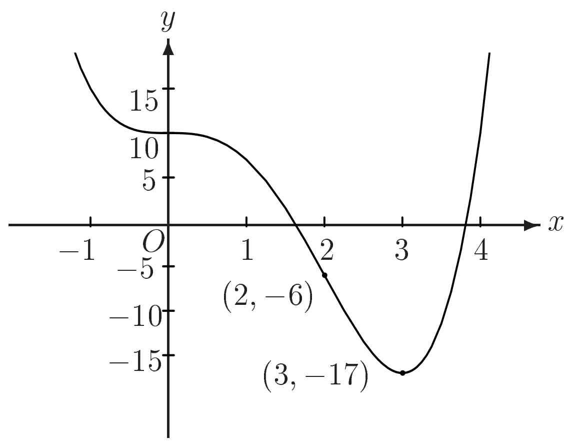


圖2.10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 之圖形

因$f''(1) = 2 > 0$, 故在$x = 1$ 有極小值$f(1) = 2$; $f''(-1) = -2 < 0$, 故在$x = -1$ 有極大值$f(-1) = 2$ 。

根據以上的討論, 立即可得到底下圖2.11 。

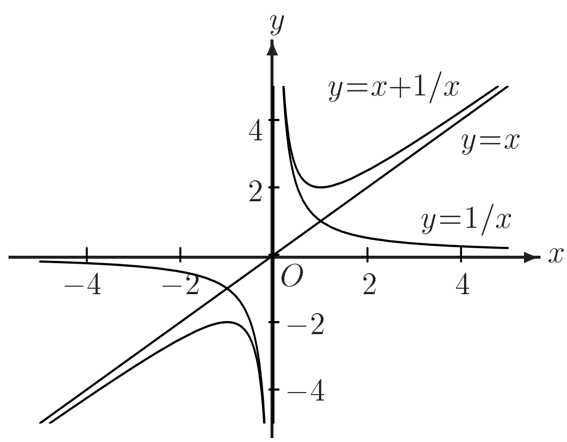


圖2.11. $f(x) = x + 1/x$ 之圖形

各位可能注意到我們並未驗證是否有反曲點。此因在$x>0$ 處, f 皆可微, 而只有一極值, 且無漸近線, 故不會有反曲點 。在$x < 0$ 處之情況亦類似 。

例2.9.試繪$f(x) = 1/(1+x^2)$ 之圖形 。
解.首先$x \to \infty$ 時, $f(x) \to 0, x \to -\infty$ 時, $f(x) \to 0$ 。故x 軸爲水平漸近線 。因$f(x) > 0, \forall x \in R$, 故圖形皆在$x$ 軸上方 。又無垂直漸近線 。因$f(x) = f(-x)$ 故圖形對稱於y 軸 。

經微分可得

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \text{ 。}$$

因此在$x = 0$ 有一臨界點 。又因$f''(0) = -2 < 0$, 故在$x = 0$ 有一相對極大 。令$f''(x) = 0$, 得$x = 1/\sqrt{3}$ 或$x = -1/\sqrt{3}$ 。f'' 之正負號如下:

x	$x < -1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$	$x > 1/\sqrt{3}$
f''	$+$	$-$	$+$

故在$x = 1/\sqrt{3}$ 及$-1/\sqrt{3}$ 皆有反曲點, 且$f(1/\sqrt{3}) = f(-1/\sqrt{3}) = 3/4$ 。f 之圖形如圖2.12 。

若無反曲點, 在$x > 0$ 處, 圖形會一直往下延伸 。但因在$x = 1/\sqrt{3}$ 有反曲點, 所以圖形扭轉過來, 愈來愈平緩, 在x 很大處, 圖形幾乎是水平的(即以x 軸爲漸近線) 。反之, 若先看出在$x = 0$ 有極大, 且以x 軸爲漸近線, 則知在$x > 0$ 處的某點必有反曲點 。反曲點的存在可說是非常順乎自然的 。

例2.10.試繪$f(x) = x^4 - 2x^3$ 之圖形 。
解.首先此爲多項式, 故無漸近線 。又$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - 3/2)$, $f''(x) = 12x(x-1)$ 。令$f'(x) = 0$ 得$x = 0$ 或$x = 3/2$ 。因$f''(0) = 0$, 故由二階導數無法判別在$x = 0$ 是否爲極值 。又在$x = 0$ 附近, $f'(x)$ 皆爲負, 故在$x = 0$ 無極值 。又$f''(3/2) > 0$, 故在$x = 3/2$

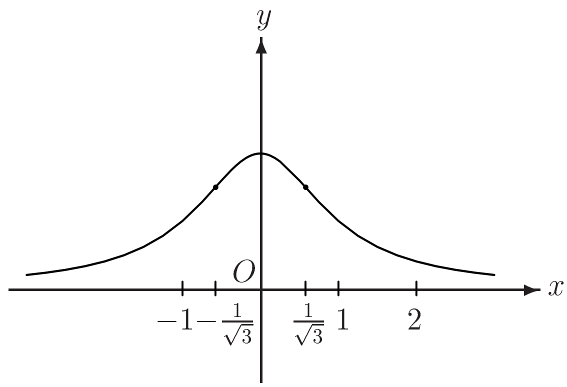


圖2.12. $f(x) = 1/(1+x^2)$ 之圖形

有極小值$f(3/2) = -27/16$ 。我們列出f' 之正負號如下 。

x	$x < 0$	$0 < x < 3/2$	$x > 3/2$
f'	$-$	$-$	$+$

令 $f''(x) = 0$ 得$x = 0$ 或1, 此二x 值爲可能有反曲點處 。f'' 之正負號如下 。

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f''	$+$	$-$	$+$

故在 $x = 0$ 及$x = 1$ 皆有反曲點, 且$f(0) = 0$, $f(1) = -1$ 。又$f(2) = 0$, 故圖形通過$x = 0$ 及$x = 2$ 處 。f 之圖形如圖2.13 。

本節最後我們來看以二階導數判別極值時, 若$f'(c) = 0$ 且$f''(c) = 0$ 該如何? 我們要給一定理2.5 之推廣 。

假設函數f, 在c 之一鄰域(a, b) 爲$n+1$ 階可微, 且$f^{(n+1)}$ 在c 連續, 又設$f^{(k)}(c) = 0$, $\forall 1 \le k \le n$ 。則反覆利用柯西均值定理得

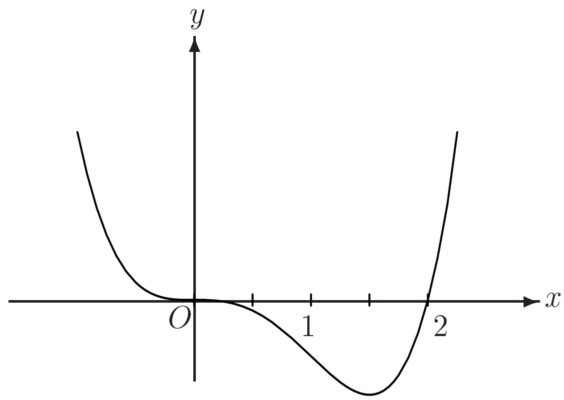


圖2.13. $f(x) = x^4 - 2x^3$ 之圖形

對$\forall x \in (a, b)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^{n+1}} &= \frac{f'(x_1)}{(n+1)(x_1-c)^n} = \frac{f'(x_1)-f'(c)}{(n+1)(x_1-c)^n} \\
&= \frac{f''(x_2)}{(n+1)n(x_2-c)^{n-1}} = \frac{f''(x_2)-f''(c)}{(n+1)n(x_2-c)^{n-1}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{f^{(n)}(x_n)-f^{(n)}(c)}{(n+1)!(x_n-c)} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

其中x_1 介於x 與c 間, x_2 介於x_1 與c 間, 餘類推 。由上式即得

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \tag{2.1}$$

其中x_{n+1} 介於x 與c 間 。對於f 有如上的表示法, 我們下一節會再深入討論 。

假設$f^{(n+1)}(c) \neq 0$ 。則只要x 與c 夠接近, $f^{(n+1)}(x_{n+1})$ 與$f^{(n+1)}(c)$ 同號 。因此利用(2.1) 式, 即得一判別f 在c 是否爲極大或極小值的準則如下:

(i) 若n 爲奇數, 且$f^{(n+1)}(c) > 0$, 則f 在$x = c$ 有極小 。

(ii) 若n 爲奇數, 且$f^{(n+1)}(c) < 0$, 則f 在$x = c$ 有極大 。

(iii) 若n 爲偶數, 則f 在$x=c$ 無極值 。

例2.11.(i) 設$f(x) = x^3$ 。則$f'(0) = f''(0) = 0$, 且$f'''(0) = 6 > 0$ 。對應於前述準則, $n=2$ 爲偶數, 故f 在$x=0$ 無極值 。

(ii) $f(x)=x^4$ 。則$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, 且$f^{(4)}(0)=24>0$ 。對應於前述準則, $n=3$ 爲奇數, 且$f^{(4)}(0)>0$,故f 在$x=0$ 有極小 。

習 題 4.2

1. 對下述各函數, 求出f 爲單調之區間, 並繪出$y=f(x)$ 之圖形 。

   (i) $f(x)=x^2-2x+8$, (ii) $(x-2)^3(x+1)^2$,
   (iii) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, (iv) $f(x)=-x^3+3x-5$,
   (iv) $f(x)=x+1/x$, (vi) $f(x)=x+5/(2x+3)$,
   (vii) $f(x)=(x-1)^{1/3}+\frac{1}{2}(x+1)^{2/3}$ 。

2. 求下述各函數之極值 。

   (i) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x}$, (ii) $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$,
   (iii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{9}$, (iv) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$,
   (v) $f(x)=x^3+3x^2-9x+10$,
   (vi) $f(x)=x^3+4x^2-3x-9$ 。

3. 試繪下述各函數之圖形, 並指出漸近線 、極值及反曲點(若找不出精確值可求至小數第一位) 。

   (i) $f(x)=x^3-x$, (ii) $f(x)=2x^3-3x^2$,
   (iii) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$, (iv) $f(x)=x+1/x^2$,
   (v) $f(x)=x/(1+x^2)$, (vi) $f(x)=x-\sin x$,
   (vii) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+4}$, (viii) $f(x)=x^{1/3}(x-4)$,
   (ix) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$, (x) $f(x)=x\sqrt{x+3}$,
   (xi) $f(x)=(x^2-4)/(x^2-9)$, (xii) $f(x)=x+1/(x-1)$,
   (xiii) $f(x)=(2x^3+x^2-1)/(x^2-1)$,
   (xiv) $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$ 。

4. 試問若函數f 在$[a, b]$ 及$[b, c]$ 中皆爲漸增, 其中$a < b < c$, 則f 是否必在$[a, c]$ 中漸增 。

5. 設二函數f 及g 皆在$[a, b]$ 中漸增, 試問$f + g$ 及fg 是否亦在$[a, b]$ 中漸增 。

6. 試繪$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ 之圖形, 其中$a_1, \cdots, a_n$ 爲常數 。

7. 試求下述各函數在所給區間之絕對極值 。

   (i) $f(x) = 1 - |1 - x|,\ x \in [-1, 1]$,
   (ii) $f(x) = (x - 1)x^{1/3},\ x \in [1/2, 2]$,
   (iii) $f(x) = x^2 + 4/x,\ x \in [1, 5]$,
   (iv) $f(x) = x^3 - 12x + 3,\ x \in [-5, 3]$,
   (v) $f(x) = (x - 2)/(x + 2),\ x \in [0, 4]$,
   (vi) $f(x) = x - \sqrt{2} \sin x,\ x \in [0, \pi]$,
   (vii) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x,\ x \in [-1, 3]$ 。

8. 試判別$f(x) = \sin x - x + x^3/6$ 在$x = 0$ 是否有極值 。

9. 試判別$f(x) = \cos x + x^2/2$ 在$x = 0$ 是否有極值 。

10. 試求$f(x) = x + \sin x$ 之極值 。

11. 試求連續函數f 及常數c, 使得

$$\int_c^x f(t)dt = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2, \quad \forall x \in R \text{ 。}$$