第四章

微分之應用

4.1 極值之定義及均值定理

微分最大的應用之一便是用來協助求一函數的極大值或極小值。許多應用問題中的求最佳解(optimum solution), 常可轉換爲求一函數的極大值或極小值的問題。若將導數視爲一函數之瞬時變化率, 則可用來求諸如物理上的速度及加速度。

極大值有兩種, 一種是我們在1.6 節討論過的絕對極大值。在一集合S 中, 若存在一$c \in S$, 使得

$$f(x) \leq f(c),\ \forall x \in S, \tag{1.1}$$

則稱f 在c 有絕對極大值$f(c)$。絕對極小值亦可類似地定義。若$f(c)$ 爲f 在S 中之絕對極大值, B 爲S 之一子集合, 且$c \in B$, 則顯然$f(c)$ 亦爲f 在B 中之絕對極大值。第一章定理6.6 也指出閉區間上的連續函數, 必有絕對極大值及絕對極小值。另一種極值是相對極值, 其定義如下。

定義1.1.設f 爲一定義在集合S 中之實值函數, 又設$c \in S$。若存在一包含c 之開區間I, 使得

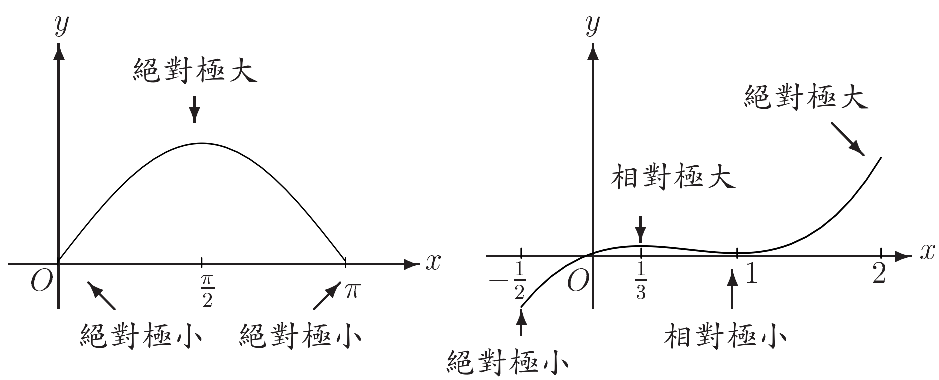
$$f(x) \leq f(c),\ \forall x \in I \cap S,$$

則稱f 在c 有相對極大值(relative maximum) $f(c)$ 。

同理可定義相對極小值(relative minimum) 。

有時我們只說相對極大或相對極小, 而省略“值” 。相對極大與相對極小合稱相對極值(relative extreme value, 或relative extremum, extremum 之複數爲extrema) 。若一數爲函數f 在S 中之一相對極值, 則稱此數爲f 之一極值 。在定義1.1 中, c 爲極值發生處, 而$f(c)$ 爲一極值 。絕對極大及絕對極小則合稱絕對極值 。可看出每一絕對極值皆爲一相對極值 。相對極大中之最大者便是絕對極大, 相對極小中之最小者便是絕對極小 。相對極大又稱局部極大(local maximum), 絕對極大又稱爲全部極大(global maximum) 。此因每一相對極大, 即爲一鄰域中的絕對極大 。因此, 有時我們會籠統地說極大(或極小), 因爲通常並不難分辨所指的是相對極大(或極小)或絕對極大(或極小) 。

若函數f 在c 有一相對極大, 則此相對極大亦爲f 在c 之一鄰域的絕對極大 。每一絕對極大當然也是一相對極大 。圖1.1爲一些可能的情況 。



$f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ $\qquad$ $f(x) = x(1-x)^2, -1/2 \leq x \leq 2$

圖1.1. 函數之極值

定理1.1.設f 定義在一開區間(a,b), 且f 在$c \in (a,b)$ 有相對極值 。若$f'(c)$ 存在, 則$f'(c) = 0$ 。

證明.在(a,b) 上定義函數Q 爲

$$Q(x)=\begin{cases}(f(x)-f(c))/(x-c)\ , & x\neq c,\\ f'(c) & ,\quad x=c\ 。\end{cases}$$

因$f'(c)$ 存在, 故$x\to c$ 時, $Q(x)\to f'(c)=Q(c)$, 因此Q 在c 連續 。若能證出$Q(c)$= 0, 則$f'(c)$= 0 便得證了 。我們將用反證法, 即分別導出$Q(c)>0$ 與$Q(c)<0$ 皆不合 。

設$Q(c)>0$, 由第一章引理6.1, 存在c 之一鄰域, 使得Q 在此鄰域中皆爲正 。即在此鄰域中對$x\neq c$, $Q(x)$ 之分子與分母同號 。故在此鄰域中, $f(x)>f(c)$, $\forall x>c$, $f(x)<f(c)$, $\forall x<c$ 。此與f 在c 有極值不合 。故$Q(c)$ 不能爲正 。同理可證$Q(c)<0$ 不合 。

因此$Q(c)=0$, 即$f'(c)=0$ 。得證 。

上述定理是在於極值發生處$x=c$ 之導數存在, 且c 爲一內點(即不爲邊界點) 之假設下的結果 。因此底下的推論便很明顯會成立 。

系理1.1.設f 在c 有極值, 則必有下述三種情況之一發生:

(i) $f'(c)$ 存在且爲0,

(ii) $f'(c)$ 不存在,

(iii) c 爲邊界點 。

因每一絕對極值亦爲一相對極值, 系理1.1 也適用絕對極值的情況 。不過, 系理1.1 之逆不眞, 即有可能(i) 、(ii) 或(iii) 中有一成立, 但f 在c 卻無極值 。例如, 若$f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, 故$f'(0)=0$ 。但f 爲一漸增函數, 因此f 在0 無極值, 見圖1.2 。

系理1.1指出導數不存在處, 有可能發生在極值 。例如, 設$f(x)=|x|$, 則f 在$x=0$ 不可微, 但f 在0 卻有一相對極小(也是絕對極小), 見圖1.3 。

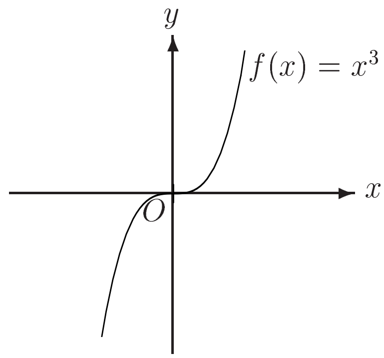


圖1.2. $f'(0) = 0$ 但f 在0 無極值

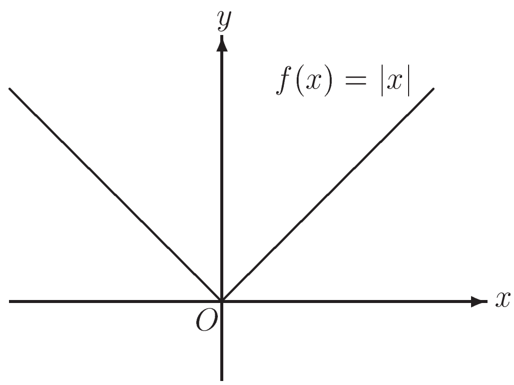


圖1.3. $f'(0)$ 不存在, 但f 在0 有極值

底下爲一簡單的例子。

例1.1.令$f(x) = x^{-1}$。則f 之定義域爲$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$。其圖形爲雙曲線, 大家在中學時代可能已經熟悉了。顯然f 在定義域中無相對極值(亦無絕對極值)。但f 在$(0, 1]$ 有絕對極小(亦爲相對極小), 發生在$x = 1$; f 在$(0, 1)$ 無極值; 在$[-2, -1]$ 之絕對極大(在$x = -2$) 及絕對極小(在$x = -1$) 皆存在; 在$[-2, 0)$ 只有絕對極大。

設c 爲f 之定義域中的一個點, 當$f'(c)$ 不存在或$f'(c) = 0$, 則c 稱爲f 之一臨界點(critical point)。例如, 若$f(x) = |x|$, 則0 爲一臨

界點; 若$f(x)=x^3$, 則0 亦爲一臨界點。不過有些書是稱$(c,f(c))$ 爲一臨界點, 有些書則只在$f'(c)=0$ 時, 才稱c 爲一臨界點。在給下一定理之前, 我們先對導數的正或負, 會對函數產生的影響做一些討論。

若函數f 在某點c 連續, 則在x 很接近c 時, $f(x)$ 的值與$f(c)$ 也會很接近。若f 在$x=c$ 可微, 會有何推論呢? 可微必連續, 因此有關連續性的結果, 此時對f 皆適用。但可微比連續要強得多, 因此我們對f 也應知道得更多才行。

設$f'(c)>0$, 則

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)>0\text{ 。}$$

因此只要h 夠小,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0,$$

即h 夠小時, $f(c+h)-f(c)$ 與h 同號。故對夠小的h, $f(c+h)>f(c)$, 當$h>0$; $f(c+h)<f(c)$, 當$h<0$。也就是存在c 之一鄰域, 使得在此鄰域中, f 爲漸增。反之, 若$f'(c)<0$, 則存在c 之一鄰域, 使得在此鄰域中, f 爲漸減。

現在我們可以給下述定理了。

定理1.2. 設f 在閉區間$[a,b]$ 連續, 且$f'(a)f'(b)<0$, 則f 在(a,b) 中有臨界點。

證明. 設$f'(a)>0$, $f'(b)<0$。由第一章定理6.6, 連續函數f 在閉區間$[a,b]$ 中必有絕對極大。但因$f'(a)>0$, 因此在a 的附近f 爲漸增, 故絕對極大不發生在a。同理絕對極大亦不發生在b。故在開區間(a,b) 中, f 有一絕對極大。即得系理1.1 之(i) 或(ii) 成立。因此f 在(a,b) 中有臨界點。

至於若$f'(a)<0$ 且$f'(b)>0$, 同理可證。

例1.2. 試證$f(x)=x^4-2x^3+3x-1$ 在$(-1,2)$ 有臨界點。

證明. 因f 爲一多項式, 故f 在$[-1,2]$ 連續。又$f'(x)=4x^3-6x^2+3$,

故$f'(-1) = -7 < 0$, $f'(2) = 11 > 0$ 。故由定理1.2 即得證 。

其次我們看Rolle 定理(Rolle's Theorem), 這是法國數學家Rolle (1652-1719) 在西元1690 年證出的 。

定理1.3.設函數f 在閉區間$[a,b]$ 連續, 且設$f(a) = f(b)$ 。則f 在開區間(a,b) 中至少有一臨界點 。

證明.若$f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a,b]$, 則f 在$[a,b]$ 爲一常數函數, 因此$f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ 。即$\forall x \in (a,b)$ 皆爲f 之臨界點 。若存在一$x_0 \in (a,b)$, 使得$f(x_0) \neq f(a)$, 因閉區間上的連續函數必有絕對極大及絕對極小, 故若$f(x_0) > f(a)$, 則f 在(a,b) 中存在一絕對極大; 若$f(x_0) < f(a)$, 則f 在(a,b) 中存在一絕對極小 。故由系理1.1 知, 存在一$c \in (a,b)$ 使得$f'(c)$ 不存在或$f'(c) = 0$ 。得證 。

底下爲一立即的推論 。

系理1.2.設函數f 在閉區間$[a,b]$ 連續, 在開區間(a,b) 可微, 又設$f(a) = f(b)$ 。則至少有一$c \in (a,b)$, 使得$f'(c) = 0$ 。

在系理1.2 之假設下, 於(a,b) 中必有一點c, 使得在c 之切線爲水平, 見圖1.4 。

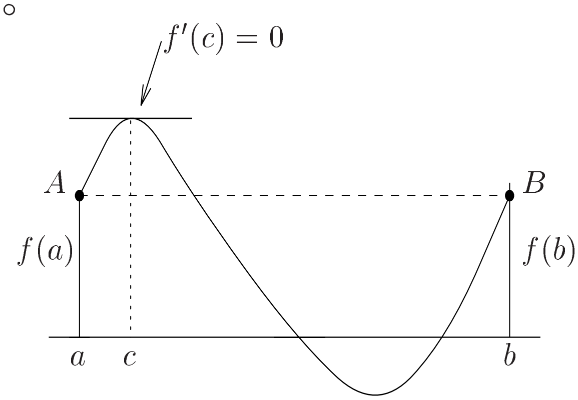


圖1.4. Rolle 定理之幾何表示

例1.3. 設$f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 5]$。因$f(5) = f(-1) = 5$, 故f 在$(-1, 5)$ 中有一臨界點。不難看出$f'(2) = 0$, 即2 爲一臨界點。

例1.4. 設$f(x) = 1 - |1 - x|$, $x \in [0, 2]$。由於$f(0) = f(2) = 0$, 故f 在$(0, 2)$ 有一臨界點, 此點顯然即$x = 1$, 爲f 之一不可微的點。

如同在積分裡, 微分中亦有均值定理(Mean-Value Theorem for Derivatives)。此定理看起來並不起眼, 但卻有很大的延伸, 我們會再說明。

在Rolle 定理中, 假設$f(a) = f(b)$, 而在對$\forall x \in (a, b)$, $f'(x)$ 存在下, 我們得到f 之圖形在(a, b) 中必有某一點其切線爲水平。換句話說, 在某一點之切線平行$(a, f(a))$ 與$(b, f(b))$ 之連線。若$f(a) \neq f(b)$ 會如何? 你可能猜到了, 會有一類似的結果, 即存在一點$c \in (a, b)$, 使得f 之圖形在c 之切線平行$(a, f(a))$ 與$(b, f(b))$ 之連線。二線平行又表其斜率相同。我們敘述並證明此結果如下。

定理1.4. (微分的均值定理). 設f 在閉區間$[a, b]$ 連續, 在開區間(a, b) 可微。則至少有一$c \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{。} \tag{1.2}$$

證明. 我們想利用Rolle 定理, 因此需要一函數在區間之二端點有相同的函數值。令

$$h(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a)) \text{。}$$

則顯然$h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$, 且$h$ 在(a, b) 可微。故利用Rolle 定理得, 存在一$c \in (a, b)$, 使得$h'(c) = 0$。因$h'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a))$, 因此即得證(1.2) 成立。

圖1.5 可顯示均值定理之幾何意義。

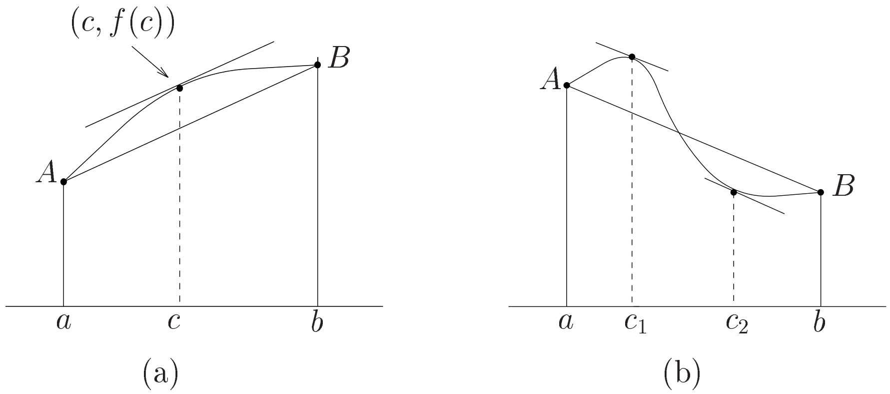


圖1.5. 均值定理之幾何意義

又(1.2) 式可改寫爲

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\text{ 。}\tag{1.3}$$

由上式我們可更了解均值定理的意義。假設有一粒子在一直線上往前移動, $f(t)$ 表至時間t 該粒子所走的距離。則(1.3) 式之左側表在時區$[a,b]$ 間粒子之平均速度, 又$f'(t)$ 表在時刻t 之瞬時速度。(1.3) 式即表在(a,b) 中必存在某一時刻, 使得在該時刻之瞬時速度等於在$[a,b]$ 間之平均速度。事實上, 當f' 亦在(a,b) 連續時, 此結果由連續函數的中間值定理(第一章定理6.3)立即可得(爲什麼?)。

另外, 均值定理只是保證c 之存在, 並未能指出c 在何處。對有些函數f, 往往c 值並不易求出。不過本定理的重要性在於c 的存在, 利用此性質可得到另一些我們所想要的結果, 而並不需要知道c 之確切的值。又要提醒各位的是, 在使用本定理時, 若f 並非在$\forall x\in(a,b)$ 可微, 便不一定適用了。例如, $f(x)=|x|$ 爲一連續函數, 且除了在$x=0$ 外皆連續。但並不存在一$c\in(-1,1)$, 使得$f'(c)=(f(1)-f(-1))/(1-(-1))=0$。

底下的定理(Cauchy's Mean-Value Formula) 爲均值定理之一小推廣。

定理1.5.(柯西均值定理)**.** 設二函數f 、g 均在閉區間$[a,b]$ 連續, 在開區間(a,b) 可微 。則至少有一$c\in(a,b)$, 使得

$$f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a)) \text{ 。} \tag{1.4}$$

證明. 令

$$h(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a)) \text{ 。}$$

則$h(a)=h(b)=f(a)g(b)-g(a)f(b)$ 。因此由Rolle 定理, 存在一$c\in(a,b)$, 使得$h'(c)=0$ 。經由將h 對x 微分, 即得(1.4) 成立 。

底下我們給幾個例子 。

例1.5. 令$f(x)=2x^2-x+1$, $x\in[0,1]$ 。則$f'(x)=4x-1$ 。又

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{12-1}{1}=1 \text{ 。}$$

故解$f'(c)=4c-1=1$ 得$c=1/2$ 。

例1.6. 設$f(x)=x^4-7x^3+2x^2+4$, $x\in[0,1]$ 。則$f'(x)=4x^3-21x^2+4x$ 。又

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-4}{1}=-4 \text{ 。}$$

由均值定理, 有一$c\in(0,1)$ 滿足$4c^3-21c^2+4c=-4$, 但c 並不易解出 。

例1.7. 設$p>1$, $x>1$, 試證

$$p(x-1)<x^p-1<px^{p-1}(x-1) \text{ 。} \tag{1.5}$$

證明. 令$f(t)=t^p$, $t\in[1,x]$, $x>1$ 。則$f'(t)=pt^{p-1}$ 。由均值定理, 存在一$c\in(1,x)$, 使得

$$f'(c)=pc^{p-1}=\frac{x^p-1}{x-1},$$

即$x^p-1= p(x-1)c^{p-1}$。因$c\in(1,x)$ 且$p>1$, 故$1< c^{p-1}< x^{p-1}$。利用此不等式立即看出(1.5) 成立。

例1.8.試證
$$5+\frac{5}{52}\le\sqrt{26}\le 5+\frac{1}{10}\text{。}$$

證明.令$f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[25,26]$。則$f'(x)=1/(2\sqrt{x})$。由均值定理, 存在一$c\in(25,26)$, 使得

$$f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{26}-\sqrt{25}}{26-25}=\sqrt{26}-\sqrt{25},$$

或
$$\sqrt{26}=\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{c}}=5+\frac{1}{2\sqrt{c}}\text{。}$$

因$c\in(25,26)$,

$$\frac{5}{52}<\frac{\sqrt{26}}{52}=\frac{1}{2\sqrt{26}}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}\text{。}$$

證畢。

諸如上例對$\sqrt{26}$ 所給的一上、下限, 在那計算機不太發達的時代有其必要。今日計算工具如此方便, 這種不等式的用途當然沒那麼大了。

其次我們來看一在3.2 節我們便已用過的結果之證明, 即若一閉區間$[a,b]$ 上的連續函數f, 滿足$f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$, 則f 在(a,b) 爲一常數。直觀上此結果是對的。因在某點之導數爲0, 表在該點之切線斜率爲0, 即切線平行x 軸, 而若曲線在每一點之切線皆平行x 軸, 此曲線必爲一平行x 軸之直線。固定一$t\in(a,b)$, 則對$\forall x\in(a,b)$, 且$x>t$, 因f 在$[t,x]$ 連續且可微, 因此均值定理適用, 且存在一$c\in(t,x)$, 使得

$$f(x)-f(t)=f'(c)(x-t)=0\text{。}$$

故得$f(x) = f(t)$。同理若$x \in (a, b)$ 且$x < t$, 亦可得$f(x) = f(t)$。因此f 在(a, b) 爲一常數。

我們知道一函數若可微必連續, 利用均值定理可獲得較連續性更進一步的資訊。設函數f 在閉區間$[a, b]$ 可微, 又設$f'(x)$ 在$[a, b]$ 有界(若$f'(x)$ 在$[a, b]$ 爲連續, 則$f'(x)$ 在$[a, b]$ 必有界), 即設存在一常數$M > 0$, 使得$|f'(x)| \le M$, $\forall x \in [a, b]$。對任意二x_1, $x_2 \in (a, b)$, 由均值定理知存在一$\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2 - x_1)| \le M(x_2 - x_1)\text{。}$$

因此對$\forall \varepsilon > 0$, 只要取$\delta = \varepsilon/M$, 則當$|x_2 - x_1| \le \delta$ 時, $|f(x_2) - f(x_1)| \le \varepsilon$。例如, 若$f(x) = x^2$, $x \in [-a, a]$。因

$$|f'(x)| = |2x| \le 2a,$$

故當$|x_2 - x| \le \varepsilon/2a$ 時, $|f(x_2) - f(x_1)| \le \varepsilon$。

在此, 我們稱一函數滿足Lipschitz 條件(Lipschitz condition, Lipschitz (1832−1903) 爲德國數學家), 或說爲Lipschitz 連續(Lipschitz continuous), 若存在一常數M, 使得對任二定義域中的x_1, x_2,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1|\text{。}$$

若Lipschitz 條件成立, 則下述商

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

之絕對值, 亦以M 爲其上界。可看出一在閉區間上有一連續導數的函數f, 必爲Lipschitz 連續。但即使一並非在每一點皆可微的函數, 也有可能爲Lipschitz 連續。例如$f(x) = |x|$。

另一方面, 並非每一連續函數皆爲Lipschitz 連續。例如, 取$f(x) = x^{1/3}$, 則

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{-2/3},$$

當x 很小時f 並非有界, 故f 在$[0, x]$ 不爲Lipschitz 連續。當然$f'(x) = x^{-2/3}/3$, 當x 很接近0 時, 也不爲有界(前面指出若f' 爲有界, f

便爲Lipschitz 連續) 。Lipschitz 連續的函數所構成的集合包含於連續函數的集合, 且包含導數是連續的函數之集合 。換句話說, Lipschitz 連續, 是一比連續性還強, 而比連續可微還弱的條件 。在數學中滿足Lipschitz 連續, 爲一類重要的函數 。

本節最後我們來看均值定理之另一應用 。

在2.8 節之習題, 我們曾求

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}$$

之導數 。此爲一到處可微, 但導數不一定連續之例 。事實上, 因

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(1/x)-\cos(1/x) & , \quad x\neq 0,\\ 0 & , \quad x=0,\end{cases}$$

故$f'(x)$ 除了在$x=0$ 外皆連續, 而且$\lim_{x\to 0+} f'(x)$ 及$\lim_{x\to 0-} f'(x)$ 皆不存在 。底下爲一判別導數之連續性的結果 。

定理1.6. 設函數f 在a 之一鄰域N 中連續, 且$f'(x)$ 存在, $\forall x\neq a$ 。又設

$$\lim_{x\to a} f'(x)=b$$

存在 。則$f'(a)$ 存在且等於b, 即此時f' 在a 連續 。

證明. 利用均值定理, 得對$\forall u\in N$ 且$u\neq a$, 存在一ξ 介於a 與u 間, 使得

$$\frac{f(u)-f(a)}{u-a}=f'(\xi) \text{ 。}$$

令$u\to a$, 則$\xi\to a$, 再由假設知$f'(\xi)\to b$ 。因此$u\to a$ 時, 上式左側之極限存在, 且等於b 。但此即表$f'(a)$ 存在且等於b 。得證 。

各位可利用上述定理, 重做第二章例7.14 。另一相關的結果亦可類似地得到, 證明留在習題 。

定理1.7. 設f 在$[a,b]$ 連續, 在(a,b) 可微, 且$\lim_{x\to a+} f'(x)=\infty$ 。則

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty \text{ 。}$$

習　題　4.1

1. 試利用柯西均值定理證明對$\forall x>0$, 存在一$z\in(0,x)$, 使得

$$\frac{\sin x - x}{x^3}=-\frac{1}{6}\cos z \text{ 。}$$

2. 對下述各函數求極值, 並指出何者爲相對極值, 何者爲絕對極值 。

   (i) $f(x)=4-x, x\in[-2,4]$;
   (ii) $f(x)=x^2-2x+2, x\in R$;
   (iii) $f(x)=x^3+x^2+x-4, x\in[-1,1]$;
   (iv) $f(x)=x^4-x^3, x\in[0,1]$;
   (v) $f(x)=x^2+4x^{-2}, x\in[-2,2]$;
   (vi) $f(x)=(x-1)/(x^2+3), x\in[-4,2]$ 。

3. 對下述各函數及區間, 試驗證均值定理是否成立 。

   (i) $f(x)=(x-1)/x, x\in[1,3]$;
   (ii) $f(x)=1+x^2, x\geq 0, =1-x^2, x<0, x\in[-1,1]$;
   (iii) $f(x)=(3-x^2)/2, x\leq 1, =x^{-1}, x\geq 1, x\in[0,2]$ 。

4. 試證

   (i) $3+\frac{1}{28}\leq\sqrt[3]{28}\leq 3+\frac{1}{27}$;
   (ii) $2+\frac{2}{165}\leq\sqrt[5]{33}\leq 2+\frac{1}{80}$ 。

5. 設f 爲一二次多項式 。試證在$y=f(x)$ 之圖形上, 連接$(a,f(a))$ 及$(b,f(b))$ 之直線, 必平行在$x=(a+b)/2$ 之切線 。

6. 設$f(x)=1-x^{2/3}$ 。試解釋爲什麼雖$f(1)=f(-1)$, 且$f'(x)$ 在$[-1,1]$ 中皆不爲零, 但此卻不違反Rolle 定理 。

7. 利用Rolle 定理證明, 對$\forall b \in R$, 方程式$x^3-3x+b=0$ 在$[-1,1]$ 中最多只有一根 。

8. 試證$x^2 = x\sin x + \cos x$ 恰有二實根 。

9. 試證若

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x = 0$$

有一正根$x = r$, 則

$$nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

有一小於r 之正根 。

10. 試證對方程式$x^n + ax + b = 0$, 若n 爲偶數最多有二實根; , 若n 爲奇數最多有三實根 。

11. 試證$x > \sin x$, $\forall x > 0$; $x < \tan x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$ 。

12. 試證

    (i) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$;

    (ii) $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$, $0 < y \leq x$, $n = 1, 2, \cdots$ 。

13. 設f 在$[a,b]$ 可微, 且對某一$c \in (a,b)$, $f'(x) \leq 0$, $\forall a \leq x < c$, $f'(x) \geq 0$, $\forall c < x \leq b$ 。試證$f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in [a,b]$ 。

14. 試證均值定理可改寫爲: 設f 在$[x, x+h]$ 連續, 在$(x, x+h)$ 可微, 其中$h > 0$ 。則存在一$\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \text{ 。}$$

分別對$f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, 決定θ (以x 及h 表之) 。固定x, $x \neq 0$, 分別對前述二函數, 求當$h \to 0$ 時θ 之極限 。

15. 設函數f 在閉區間$[a,b]$ 連續, 在開區間(a,b) 二次可微 。又設$(a,f(a))$ 與$(b,f(b))$ 之連線交$y=f(x)$ 之圖形於$(c,f(c))$, 其中$c\in(a,b)$ 。試證存在一$\xi\in(a,b)$, 使得$f''(\xi)=0$ 。

16. 設函數f 在實數上可微 。試證若$f(0)=0$ 且$|f'(x)|\leq|f(x)|$, 則$f(x)=0,\forall x\in R$ 。

17. 若存在c 之一去心鄰域D, 及一常數$M>0$ (M 可能與c 有關), 使得

$$|f(x)-f(c)|<M|x-c|^{\alpha},\forall x\in D,$$

則稱f 在c 滿足α 次之Lipschitz 條件(Lipschitz condition of order α) 。設f 在c 滿足α 次之Lipschitz 條件 。試證若$\alpha>0$, 則f 在c 連續, 若$\alpha>1$, 則f 在c 可微 。

18. 設f 定義在$[a,b]$, 若存在一常數$M>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|<M|x-y|^{\alpha},\forall x,y\in[a,b],$$

則稱f 在$[a,b]$ 滿足α 次之均勻Lipschitz 條件(uniform Lipschitz condition of order α) 。試證若$\alpha>1$, 則f 在$[a,b]$ 爲一常數 。

19. 試證定理1.7 。