第三章

微分與積分之關係

3.3 變數代換法

在上一節的微積分基本定理告訴我們, 求積分的問題已可轉換爲求不定積分的問題 。所謂積分的技巧, 便是指任一求不定積分之有系統的方法 。

許多教科書會列出一些不定積分的表(稱爲常用積分表), 將一些常見函數的積分公式列出 。其中有三種技巧是比較重要的 。第一種爲變數代換法(change of variable, 或稱integration by substitution), 第二種爲分部積分法(integration by parts), 第三種爲部分分式法(integration by partial fractions) 。這幾種主要的積分技巧, 除了協助積分表之建立, 並常可用來將一些所欲求的積分, 轉換爲積分表中有的基本形式, 因此求出其積分 。本節便先討論變數代換法 。

變數代換法是由微分的連鎖規則來的 。在適當的條件下(g 有一連續的導數(這種函數稱爲連續可微, continuously differentiable, 注意並非指g 既連續又可微) 及$F(g(x))$ 爲連續, 爲一充分的條件), 我們有

(3.1) $$DF(g(x)) = F'(g(x))g'(x),$$

因此
$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C\ 。$$
若令$F' = f$, 即得
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \tag{3.2}$$
其中F 爲f 之一反導數。若再令
$$u = g(x),\ du = g'(x)dx,$$
則(3.2) 可改寫爲下述較常用的形式:
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du\Big|_{u=g(x)}\ 。 \tag{3.3}$$
上式即稱爲積分公式之變數代換, 其中垂線下寫一$u = g(x)$ 表積分後u 要以$g(x)$ 取代。因F 爲f 之一反導數, 故得
$$\int f(u)du\Big|_{u=g(x)} = (F(u) + C)\Big|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C\ 。 \tag{3.4}$$
若是定積分, 則不難看出(3.3) 可寫成下式, 證明則留在稍後。
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du\ 。 \tag{3.5}$$

我們略微解釋一下。在(3.3) 式之左側, 我們作了變數代換, 即令$u = g(x)$, 然後再令du 爲g 之導數乘上dx, 即令$du = g'(x)dx$。而在(3.5) 式中, 原來x 之範圍爲由a 至b, 因$u = g(x)$, 故u 的範圍爲由$g(a)$ 至$g(b)$。不過再強調一次, $\int f(u)du$ 只是一符號, 代表積分, 其中的du 單獨來看, 其實沒什麼意義。我們令$u = g(x)$, 然後以du 來取代$g'(x)dx$, 只是一種符號上的設計, 幫助我們將數學的運算轉換成機械的方式。這是萊布尼茲符號再一次顯現其便利之處。我們之所以能得到(3.3) 式, 所依據的就是(3.1) 的微分規則。若採用萊布尼茲的符號, 則(3.1) 式成爲
$$\int f(g)dg = \int f(u)du\ 。 \tag{3.6}$$

而因$u=g(x)$, 故
$$g'(x)dx=\frac{du}{dx}dx$$
若將上式右側"分子" 及"分母" 之dx 消去後, 就剛好得到du, 彷彿不需其他驗證, 便可得到(3.3) 式。

變數代換法能否成功, 端視我們是否能正確地決定積分算子中, 那一部分必須以u 取代。有時不只一種變換均能成功。底下給幾個例子。

例3.1. 求$\int 2x(x^2+1)^3dx$。

解. 令$u=x^2+1$, 則$du=2xdx$, 且
$$\begin{aligned}\int 2x(x^2+1)^3dx &= \int u^3du\Big|_{u=x^2+1}=(\frac{1}{4}u^4+C)\Big|_{u=x^2+1}\\ &= \frac{1}{4}(x^2+1)^4+C\text{。}\end{aligned}$$

例3.2. 求$\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}dx$。

解. 令$u=x^2-1$ 則$du=2xdx$。又$x=1$ 時, $u=0; x=3$ 時, $u=8$。故
$$\begin{aligned}\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int_0^8\sqrt{u}du=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{3/2})\Big|_0^8\\ &= \frac{1}{3}(8^{3/2}-0^{3/2})=\frac{16\sqrt{2}}{3}\text{。}\end{aligned}$$

在上例中, 若將積分算子改爲$\sqrt{x^2-1}$, 看起來似乎較容易, 但卻無法採用前述變換。因$xdx=du/2$, 2 爲一常數, 上例之積分算子缺乏2, 我們可以變換後再除以2, 但卻無法在積分外除以一x。本例稍後我們會以其他變換來求其積分。另外, 也可先求出$x\sqrt{x^2-1}$ 之反導數
$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{1}{4}(x^2-1)^{3/2},$$
再代入積分的上、下限3 及1, 所得答案仍相同。

例3.3. 求$\int\frac{u^2}{(u^3+1)^2}du$。

解.令$y=u^3+1$, 則$dy=3u^2du$, 且

$$\begin{aligned}\int\frac{u^2}{(u^3+1)^2}du &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{y^2}dy=\frac{-1}{3}\frac{1}{y}+C\\ &= -\frac{1}{3(u^3+1)}+C\text{ 。}\end{aligned}$$

例3.4.求$\int x^3\cos x^4dx$ 。
解.令$u=x^4$, 則$du=4x^3dx$, 且

$$\begin{aligned}\int x^3\cos x^4dx &= \frac{1}{4}\int\cos udu=\frac{1}{4}\sin u+C\\ &= \frac{1}{4}\sin x^4+C\text{ 。}\end{aligned}$$

例3.5.求$\int_2^3\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$ 。
解.令$u=x^2+2x+3$, 則$du=2(x+1)dx$, 且

$$\int_2^3\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\frac{1}{2}\int_{11}^{18}\frac{1}{\sqrt{u}}du=\sqrt{u}\Big|_{11}^{18}=\sqrt{18}-\sqrt{11}\text{ 。}$$

當然也可先求出不定積分

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\sqrt{x^2+2x+3}+C,$$

則

$$\int_2^3\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\sqrt{x^2+2x+3}\Big|_2^3=\sqrt{18}-\sqrt{11}\text{ 。}$$

例3.6.設ϕ' 存在且連續, 則

$$\int\phi(x)\phi'(x)dx=\int\phi(x)d\phi(x)=\frac{1}{2}\phi^2(x)+C\text{ 。}$$

一般則有

$$\int\phi^n(x)\phi'(x)dx=\frac{1}{n+1}\phi^{n+1}(x)+C\text{ 。}$$

例如

$$\int\sin^n x\cos xdx=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x+C\text{ 。}$$

同理, 若函數$f(x)$ 在$x\in[-1,1]$ 爲連續, 則

$$\int_a^b f(\sin x)\cos x dx=\int_{\sin a}^{\sin b} f(x)dx \text{ 。}$$

若取$a=0, b=2\pi$, 則變數代換$u=\sin x$, 並非一$1-1$ 的變換 。此時

$$\int_0^{2\pi} f(\sin x)\cos x dx=\int_0^0 f(u)du=0 \text{ 。}$$

現在我們給一(3.5) 式之證明 。

定理3.1.設g 之導數g' 在開區間(r,s) 上連續, 令J 表g 在(r,s) 之値域, 又設f 在J 連續 。則對$\forall a,b\in(r,s)$,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \text{ 。} \tag{3.7}$$

證明.令$\eta=g(a)$, 且定義二新函數P,Q 如下:

$$P(\xi)=\int_\eta^\xi f(u)du,\ \xi\in J,$$
$$Q(\xi)=\int_\eta^\xi f(g(x))g'(x)dx,\ \xi\in J \text{ 。}$$

由微積分基本定理(定理2.1),

$$P'(\xi)=f(\xi),\ Q'(\xi)=f(g(\xi))g'(\xi) \text{ 。}$$

故由微分之連鎖規則, 得

$$(P(g(\xi)))'=f(g(\xi))g'(\xi)=Q'(\xi) \text{ 。}$$

再由微積分基本定理(定理2.2),

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du=\int_{g(a)}^{g(b)} P'(u)du=P(g(b))-P(g(a)),$$

且

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_a^b Q'(x)dx = \int_a^b (P(g(x)))'dx \\ &= P(g(b)) - P(g(a)) \text{ 。}\end{aligned}$$

故(3.7) 成立 。

經過以上的討論, 大家對變數代換法應已有一初步的了解 。在機率論裡, 隨機變數間也有變數代換, 雖其意義與積分裡只是爲了計算上的方便而做的代換不同, 但中間的運算過程卻是類似的 。變數代換是初等機率論裡一重要的題材, 事實上許多機率論裡的題材, 往往可在微積分中找到其原形 。底下我們對變數代換再做一些說明 。

微積分基本定理將積分的問題轉爲求反導數 。雖這對積分來說已是一大躍進, 但有時仍不易看出一函數之反導數 。例如, 對前述例3.1 至例3.5, 其中有幾個一眼可能看不出其反導數 。但經過適當地變換後, 積分算子便轉換成較簡單的形式, 而可利用熟知的公式算出積分 。當然變數代換法並非萬能, 很多時候利用此法仍行不通, 這時便只好另謀它途 。在使用變數代換法時, 若積分算子有如(3.2) 式左側之$f(g(x))g'(x)$ 的形式, 則很清楚地可令$u = g(x)$, 然後設法求出f 之反導數即可, g 並需要爲一$1-1$ 的函數 。但有時一開始積分算子是$f(x)$, 即求$\int_a^b f(x)dx$, 而做的變換是令$u = g(x)$, 這時就有些細節要留意了 。

若在$[a, b]$ 中, $g'(x)$ 皆全爲正或全爲負, 即此時g 爲一由x 至u 之嚴格單調的變換 。因此反函數$x = g^{-1}(u)$ 存在, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(u))(g^{-1}(u))'du \text{ 。} \tag{3.8}$$

但若g 不爲嚴格單調的變換, 便可能產生錯誤了, 見下例 。

例3.7. 求$\int_{-1}^2 x^2dx$ 。

解. 此積分值顯見爲$\frac{1}{3}x^3|_{-1}^2 = 3$ 。但若令$x^2 = u$, 解出$x = \sqrt{u}$,

$dx = 1/(2\sqrt{u})$, 且$x=-1$ 時$u=1, x=2$ 時, $u=4$, 則

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_1^4 u\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_1^4 u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{7}{3},$$

顯然爲錯誤 。

錯誤發生在何處? 自$x^2=u$, 可解出$x=\sqrt{u}$ 或$x=-\sqrt{u}$, 視x 的範圍而定 。即要先將原積分改寫成二項積分的和再做 。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} x^2 dx &= \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx \\
&= \int_{-1}^{0} u(-\frac{1}{2\sqrt{u}})du + \int_0^2 u(\frac{1}{2\sqrt{u}})du \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} u^{1/2}du + \frac{1}{2}\int_0^u u^{1/2}du \\
&= -\frac{1}{3}(0-(-1)) + \frac{1}{3}(8-0) \\
&= 3,
\end{aligned}$$

便得正確的結果了 。

所以對g 不爲嚴格單調函數時, 因此時g 可能有不只一個反函數, 便要先將積分區間拆成幾個子區間, 且使g 在每一子區間g 有反函數 。至於若積分算子爲$f(g(x))g'(x)$ 的形式, 即使g 不爲嚴格單調函數, 則因此時不用解出反函數$x=g^{-1}(u)$, 仍照以往的作法也沒問題 。例如在例3.1 中, 若改爲求$\int_{-2}^{3} 2x(x^2+1)^3dx$, 則依例3.1 所得反導數, 積分值應爲$\frac{1}{4}(9+1)^4 - \frac{1}{4}(4+1)^4 = \frac{1}{4}(10^4-5^4)$ 。但如下可看出, 若拆成兩個積分, 仍得相同答案 。

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} 2x(x^2+1)^3dx &= \int_{-2}^{0} 2x(x^2+1)^3dx + \int_0^3 2x(x^2+1)^3dx \\
&= \int_5^1 2(-\sqrt{u-1})u^3\frac{-1}{2\sqrt{u-1}}du \\
&\quad + \int_1^{10} 2\sqrt{u-1}u^3\frac{1}{2\sqrt{u-1}}du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_5^1 u^3du + \int_1^{10} u^3du \\
&= \frac{1}{4}u^4\Big|_5^1 + \frac{1}{4}u^4\Big|_1^{10} \\
&= \frac{1}{4}(1-5^4) + \frac{1}{4}(10^4-1) \\
&= \frac{1}{4}(10^4-5^4) \text{ 。}
\end{aligned}
$$

另外, 有時積分算子只有$f(g(x))$ 的形式, 即求$\int f(g(x))dx$ 。此時若能找到一函數h, 使得

$$f(g(x)) = h(g(x))g'(x), \tag{3.9}$$

則便可用變數代換 。即令$u = g(x)$, 而有

$$\int f(g(x))dx = \int h(g(x))g'(x)dx = \int h(u)du \text{ 。} \tag{3.10}$$

而若$u = g(x)$ 有一連續且不爲零的導數$g'(x)$, 則(3.9) 成立 。此因這時反函數$x = g^{-1}(u)$ 存在, 且有一連續的導數

$$\frac{dg^{-1}(u)}{du} = \frac{dx}{du} = \frac{1}{g'(x)} \text{ 。} \tag{3.11}$$

由上式可看出爲何要假設$g'(x) \neq 0$ 。再定義函數h 爲

$$h(u) = f(u)\frac{dg^{-1}(u)}{du} = f(u)/g'(x), \tag{3.12}$$

其中最右側等式成立是用到(3.11) 式 。則以$u = g(x)$ 代入上式便得(3.9) 式 。

因此在適當地條件下, (3.12) 可以成立, 且

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))dx &= \int h(u)du \\
&= \int f(u)\frac{dg^{-1}(u)}{du}du \\
&= \int f(u)\frac{dx}{du}du,
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

萊布尼茲的符號又再度顯示出其便利之處。初學者要切記的是, 在以u 取代$g(x)$ 後, 原來的積分

$$\int f(g(x))dx \neq \int f(u)du \text{ 。}$$

換句話說, 並不是只將$g(x)$ 改爲u 而已, 而是要將du 也乘上dx/du。比較(3.2) 最左及最右項便可明瞭。至於若求定積分, 積分之上、下限也要對應變換。

例3.8. 求$\int_1^4 1/\sqrt{x}dx$。

解. 令$u=\sqrt{x}$, 則$x=u^2, dx=2udu$, 且

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{u}2udu = \int_1^2 2du = (2u)\Big|_1^2 = 2 \text{ 。}$$

另外, 若令$u=1/x$, 則

$$\int_{1/2}^1 \sin(\frac{1}{x})dx = \int_2^1 \sin u \frac{-1}{u^2}du = \int_1^2 \frac{\sin u}{u^2}du \text{ 。}$$

例3.9. 求$\int x\sqrt{2-x}dx$。

解. 令$2-x=u$, 則

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2-x}dx &= \int -(2-u)\sqrt{u}du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}(2-x)^{5/2} - \frac{4}{3}(2-x)^{3/2} + C \text{ 。}\end{aligned}$$

習　題　3.3

$1-27$ 題求積分。

1. $\int x\sqrt{1+3x}dx$ 。
2. $\int (x+2)\sqrt{4x+5}dx$ 。
3. $\int x^2\sqrt{x+1}dx$ 。
4. $\int \sin^3 x dx$ 。
5. $\int x(x-1)^{1/3}dx$ 。
6. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ 。
7. $\int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}dx$ 。
8. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$ 。
9. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx$ 。
10. $\int x^2(2x^3+3)^{2/3}dx$ 。
11. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}dx$ 。
12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}dx$ 。
13. $\int \frac{(x^2-2x+1)^{1/5}}{1-x}dx$ 。
14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 。
15. $\int \sqrt{u}\sqrt{1+u\sqrt{u}}du$ 。
16. $\int x^{n-1}\sin x^n dx$ 。
17. $\int_{-1}^{2} 9x^2(1+3x^3)^2 dx$ 。
18. $\int_{0}^{-5} \sqrt{1-3u}du$ 。
19. $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}dx$ 。
20. $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}dx$ 。
21. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$ 。
22. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}dx$ 。
23. $\int_{0}^{\pi/4} \cos 2x\sqrt{4-\sin 2x}dx$ 。
24. $\int_{3}^{8} \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$ 。
25. $\int_{1}^{2} \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ 。
26. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx$ 。
27. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{3/2}}}dx$ 。

28. 試證
$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt, \forall x > 0 \text{ 。}$$

29. 試證對任二正整數m, n,
$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \text{ 。}$$

30. 試證(可利用$x=\sin u$ 之變換)對每一正整數n,
$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du \text{ 。}$$

31. (i) 試證(可利用$u=\pi-x$ 之變換)
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx \text{ 。}$$

(ii) 利用(i) 導出
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \text{ 。}$$

32. 試證對任一正整數m,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^m x dx = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx \text{ 。}$$

33. 令

$$F(x,a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q} dt,$$

其中$a > 0, p, q$ 爲二正整數。試證

$$F(x,a) = a^{p+1-2q} F(x/a, 1) \text{ 。}$$

34. 令$K = \int_{-1}^1 dy$, 立即看出$K = 2$。但若令$y = x^{5/2}$, 則得$K = \frac{5}{2}\int_1^1 x^{3/2} dx = 0$。試解釋其中原委。