第三章

微分與積分之關係

3.2 微積分基本定理

本節介紹我們已多次提到的微積分基本定理。微積分裡只有此定理是被稱爲基本定理, 如同代數中只有一個基本定理, 可見此定理之獨特性。本定理共分兩部分, 我們陳述爲二定理。

微積分基本定理建立起微分與積分的關係, 由此關係可看出, 微分與積分類似兩個互爲可逆的運算, 如平方及開方。將一正數平方後, 再取其正平方根, 便得回原數(即若$x > 0$, 則$\sqrt{x^2} = x$, 我們不用先將x 平方, 直接可得x^2 之平方根爲x)。同樣地, 若將一連續函數積分, 得到一新的函數(爲原來函數之不定積分), 再將此新函數微分, 可得回原來的函數。如取$f(x) = x^2$, 則

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}c^3$$

爲f 之一不定積分。經微分後得$A'(x) = x^2 = f(x)$。底下則爲一般的結果。

定理2.1.(微積分基本定理的第一部分). 設對$\forall x \in [a, b]$, f 在$[a, x]$

可積 。給定一$s\in[a,b]$, 定義下述函數

$$A(x)=\int_s^x f(t)dt,\ x\in[a,b]\ 。\tag{2.1}$$

則對$\forall x\in(a,b)$, 只要f 在x 連續, A 便在x 可微, 且

$$A'(x)=f(x)\ 。\tag{2.2}$$

證明.設$x\in[a,b]$ 爲f 之一連續點, 我們想要證明

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)\ 。\tag{2.3}$$

由(2.1), 且因$f(t)=f(x)+(f(t)-f(x))$, 故

$$\begin{aligned} A(x+h)-A(x) &= \int_s^{x+h} f(t)dt-\int_s^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x)dt+\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt \\ &= hf(x)+\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\ 。\end{aligned}$$

因此

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\ 。\tag{2.4}$$

故若能證出上式最右那項當$h\to 0$ 時, 亦趨近至0, (2.3)便得證了 。

因f 在x 連續, 故$\forall\varepsilon>0$, 存在一$\delta>0$, 使得

$$|f(t)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall|t-x|<\delta\ 。$$

選取h, 滿足$0<h<\delta$, 則對$\forall t\in[x,x+h]$, $|t-x|<\delta$ 成立, 故$|f(t)-f(x)|<\varepsilon/2$ 。又利用每一函數, 其積分後的絕對值小於或等於其絕對值之積分(第二章系理4.1), 得

$$\begin{aligned} \left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| &\le \int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt \\ &\le \int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}h\varepsilon\ 。\end{aligned}$$

由此即得$\forall\varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$, 使得$0 < h < \delta$ 時,

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \text{ 。}$$

若$-\delta < h < 0$, 用類似的討論仍可得到上式成立 。本定理證畢 。

上述定理指出, 在適當的條件下(即f 在x 要連續), 若欲將一函數積分後所得之新函數再微分, 則可省卻一開始之積分過程, 新函數在x 之導數即爲原來函數在x 之值 。讀者不難自行舉出一些在x不連續且此時(2.2)不成立之函數f 。

若f 在x 之一鄰域爲連續(定理2.1 只假設f 在x 連續), 則上述證明可簡化許多 。先考慮$h > 0$, 且設f 在$[x, x+h]$ 連續 。由積分之均值定理(第二章定理4.10), 存在一$z \in [x, x+h]$, 使得

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(z) \text{ 。}$$

故

$$\lim_{h\to 0+}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} f(z) = f(x) \text{ 。}$$

至於$h < 0$ 的情況同理可證 。

設$f \geq 0$, 則積分代表面積, 讀者可試繪一圖(假設f 連續), 便可了解前述過程的幾何意義 。

其次我們討論微積分基本定理的第二部分 。

首先若f 爲(a, b) 中之一常數函數, 則$f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ 。反之, 若$f'(x) = 0$, 表在x 處f 之切線斜率爲0, 即在x 處之切線爲一水平線 。因此, 若$\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$, 則直觀上$f$ 在(a, b) 爲一常數 。此結果利用我們擺在後面關於微分的均值定裡(見4.1 節) 便立即可得 。我們便先接受好了, 即在(a, b) 中一函數f 之導數恆爲0, 若且唯若f 在(a, b) 中爲常數 。接著我們給反導數(antiderivative)之定義 。反導數又稱原函數(primitive function) 。由字面上可看出兩個名詞各自的涵意 。

定義2.1. 函數F 若滿足$F'(x)=f(x), \forall x\in(a,b)$, 便稱爲函數$f$ 在(a,b) 之反導數。

例如, sine 函數爲cosine 函數在任一區間之一反導數(因$(\sin x)'=\cos x$)。一函數之反導數並不唯一, 此因若找到f 之一反導數F, 則$F+C$, 其中C 爲一常數, 亦爲f 之一反導數。反之, 若F, P 皆爲f 之反導數, 則因$F'(x)-P'(x)=f(x)-f(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$, 故$F-P$ 在(a,b) 上亦爲一常數。也就是同一函數之二反導數的差爲一常數。

微積分基本定理的第一部分告訴我們, 對一連續函數, 經由積分, 可得其一反導數。此結果再加上任二反導數之差爲一常數, 便得下述定理。

定理2.2. (微積分基本定理的第二部分). 設f 在開區間(a,b) 上連續, 且F 爲f 在(a,b) 上之一反導數。則對$\forall s, x\in(a,b)$,

$$F(x)=F(s)+\int_s^x f(t)dt \text{。} \tag{2.5}$$

證明. 令$A(x)=\int_s^x f(t)dt$。由於假設f 在(a,b) 連續, 定理2.1 指出$A'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$。亦即A 爲f 在(a,b) 上之一反導數。又因二反導數之差爲一常數, 故存在一常數C, 使得$A(x)-F(x)=C$。令$x=s$, 因$A(s)=0$, 故得$C=-F(s)$。因此(2.5) 成立。

定理2.2 告訴我們, 對連續函數f 之一反導數F, 都可經由先選定一s, 將f 由s 積分至x, 然後加上$F(s)$ 便得到$F(x)$。但這還不是此定理最大的功能。若將(2.5) 式改寫爲下式, 便可看出此定理的威力了。

$$\int_s^x f(t)dt=F(x)-F(s)=F(t)\Big|_s^x \text{。} \tag{2.6}$$

即f 在$[s,x]$ 上之積分, 若能找到f 之一反導數F, 便立即可得了。求積分本來是一件很艱鉅的工作, 但現在此問題卻轉換成求反導

數。一般而言, 後者較前者容易多了。不論用什麼方式, 只要能找出f 之一反導數, 則f 之積分便解決了。也因此每一個微分公式便對應一積分公式。彷彿過去在中學時代, 每一多項式的乘積公式, 便對應一分解因式的公式。若每次積分都要由上一章之定義著手, 則眞是辛苦萬分。但微分是我們較不懼怕的, 我們一向較會處理各種微分的運算。

底下先給幾個例子。

例2.1.對n 爲一非負整數, 在上一章我們曾直接由定義算出

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \text{。} \tag{2.7}$$

但對n 不爲整數將如何? 定理2.2 告訴我們可以先反湊一下, 看那個函數微分後可得x^n。而在上一章例7.12 我們也曾證明, 對每一有理數n, $(x^n)' = nx^{n-1}$, 而此即$(x^n/n)' = x^{n-1}$, 只要$n \neq 0$。故對每一有理數$n \neq -1$,

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \text{。}$$

即$x^{n+1}/(n+1)$ 爲x^n 之一反導數, 其中$n \neq -1$ 爲有理數。因此定理2.2 導致(2.7) 式對$n \neq -1$ 爲有理數亦成立。

至於$n = -1$ 或n 爲任一實數的情況, 我們要等到第五章學了指數及對數後, 才有辦法做。事實上(2.7) 式對每一$n \neq -1$ 之實數皆成立。而$n = -1$ 的情況要另外處理。

例2.2.在2.5 節我們曾費了一番功夫, 才求出sine 函數及cosine 函數的積分。利用$(\sin x)' = \cos x$ 及$(\cos x)' = -\sin x$, 因此$\sin x$ 爲$\cos x$ 之一反導數, $-\cos x$ 爲$\sin x$ 之一反導數, 定理2.2 便立即導致

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a,$$
$$\int_a^b \sin x dx = (-\cos x) \Big|_a^b = \cos b - \cos a$$

本節最後我們對反導數及不定積分的涵意會再做一些說明。

定理2.1 指出一函數f 的不定積分, 例如$\int_s^x f(t)dt$, 爲下述問題之解: 給定f, 求一函數F, 滿足

$$F'(x) = f(x)\text{。} \tag{2.8}$$

此問題要求我們做一微分的運算。在數學中常會出現這種逆運算的問題。而爲了解這類問題, 往往引進新的概念(例如, 爲了解$a + x = b$ 而引進整數, 爲了解$ax = b$ 而引進有理數, 其中a, b 爲二自然數)。由解(2.8) 式我們常引進新函數, 此點以後會說明。

滿足(2.8) 式之一函數F, 便稱爲f 之反導數。解(2.8) 式, 或說找f 之一反導數, 乍看之下與積分完全是兩回事。但定裡2.1 卻證出了, 每一f 之不定積分必爲f 之一反導數。不過此結果並未完全解決找出f 之所有反導數(即找出(2.8) 之所有解) 的問題。f 之不定積分只是一個反導數, 可能尚有其他f 的反導數。定理2.2 回答了這部分的問題。即f 之任一反導數F, 爲f 之一不定積分加上一常數。也就是說

$$F(x) = C + \int_s^x f(t)dt\text{。} \tag{2.9}$$

我們可能會猜想在上式中, 常數C 可以省略。此因經由改變積分之下限s, 所得之反導數與原來的反導數差一個常數, 亦即任一反導數經適當地選取積分下限後, 可寫成一不定積分。但通常, 若省略常數C, 卻無法得到所有反導數。例如, 若$f(x) \equiv 0$, 則不定積分$\int_s^x f(t)dt \equiv 0$, 但任一常數皆爲f 之反導數。另一例爲設$f(x) = x$, 則不定積分爲$x^2/2 - s^2/2$, 爲$x^2/2$ 減去一非負的數, 但$x^2/2 + 1$ 亦爲f 之一反導數。因此若要表示出所有反導數, 則(2.9) 式中之常數C, 不能省略。

由於反導數及不定積分有前述關係, 我們便想推廣不定積分的概念, 以便能包含所有的反導數。對任一$C + \int_s^x f(t)dt$, 我們都將稱之爲不定積分, 如此一來便不用再區別反導數及不定積分了。不定積分及反導數本來是兩個不同的概念, 有了微積分基本定

理, 此二概念便合而爲一了。至於$\int_a^b f(x)dx$ 則稱爲定積分(definite integral)。

今後, 我們會以(這也是萊布尼茲所採用的)

$$F(x) = \int f(x)dx \tag{2.10}$$

來代表f 之一反導數。即經適當地選取常數C 及s 後,

$$F(x) = C + \int_s^x f(u)du\text{。}$$

(2.10) 之表示方法就是將積分的上、下限s 及x 皆省去, 並以x 爲積分的變數。嚴格地講, 積分的變數及上限皆採用x 是不好的寫法。我們要特別留意, 符號$\int f(x)dx$ 只是代表f 之某一反導數。(2.10) 的意義與

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

之意義是完全相同的。設P 爲f 之一反導數, 利用(2.10) 之記號便得

$$\int f(x)dx = P(x) + C,$$

其中C 爲一常數, 稱爲積分常數。例如, 因$(\sin x)' = \cos x$, 所以可寫成

$$\int \cos x dx = \sin x + C\text{。}$$

而

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x dx &= (\sin x + C)\Big|_a^b = (\sin b + C) - (\sin a + C)\\ &= \sin b - \sin a = \sin x\Big|_a^b\text{。}\end{aligned}$$

也就是在求定積分時, 常數C 一開始便可省略。而一般則有

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b\text{。} \tag{2.11}$$

另外, 萊布尼茲的符號尚有下述便利之處。爲了簡便設$f(x) = F'(x)$ 爲一連續函數。則定理2.2 可以下式表示。

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_a^b dF(x),$$

其中在最後一等式中, 彷彿將dx 約分掉而得。

自不定積分來求定積分, 如果定積分的積分範圍含有不在積分算子定義域中的點, 便要多加留意。例如, 在求

$$\int \frac{1}{x^2}dx$$

時, 因x^{-2} 的反導數爲$-x^{-1}+C$, 故

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C\text{。} \tag{2.12}$$

因x^{-1} 的定義域不包含0 這點, 所以上式要成立, 須$x \neq 0$ 才行。上式其實爲一不定積分, 也就是反導數的公式。而左、右兩函數要相等, 定義域也要相同, 即皆爲$R \setminus \{0\}$。因此, 若利用不定積分的公式要求下述定積分

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}dx$$

就不行了。因積分範圍包含0, 但$x = 0$ 不能使(2.12) 成立。對大部分的積分公式, 我們常不特別的提使其成立之變數範圍。一方面是爲了簡明, 一方面認爲大家都理解函數要有意義, 公式才有意義。

習 題 3.2

1. 以求反導數的方法求下述積分。

(i) $\int_1^5 (4x^4 + 2x)dx$,	(ii) $\int_0^1 (x+1)(x^3-2)dx$,
(iii) $\int_2^4 \frac{x^4+x-3}{x^3}dx$,	(iv) $\int_0^3 (1+\sqrt{x})^2dx$,
(v) $\int_1^3 (\sqrt{2x} + \sqrt{x^3})dx$,	(vi) $\int_1^4 \frac{2x^2-6x+7}{2\sqrt{x}}dx$,
(vii) $\int_1^8 (2x^{1/3} - x^{-1/3})dx$,	(viii) $\int_a^b (3\sin x + \cos 2x)dx$,
(ix) $\int_3^6 \sqrt{y-2}dy$,	(x) $\int_0^1 (z+1)^{-1/2}dz$。

2. (i)試證$D(\sqrt{2x+1})=(2x+1)^{-1/2}$, 並求$\int_0^4(2x+1)^{-1/2}dx$;

   (ii)試證$D(\sqrt{1+2x^2})=2x/\sqrt{1+2x^2}$, 並求$\int_0^2 x/\sqrt{1+2x^2}dx$ 。

3. 試證不存在一多項式f, 滿足$f'(x)=x^{-1}$ 。

4. 試求

   (i) $\int_0^x |t|dt$, (ii) $\int_0^x (t+|t|)^2dt$,

   (iii) $\int_{-2}^4(|x-1|+|x+1|)dx$, (iv) $\int_0^2 \max\{3x,4-x^2\}dx$ 。

5. 求連續函數f 使其滿足

$$\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{2}+x^2+x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x,\ \forall x\in R\text{ 。}$$

6. 求連續函數f 及常數c, 使得

$$\int_c^x tf(t)dt=\cos x-\frac{1}{2},\ \forall x\in R\text{ 。}$$

7. 求連續函數f 及常數c, 使得

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2f(t)dt+\frac{1}{8}x^{16}+\frac{1}{9}x^{18}+c\text{ 。}$$

8. 設g 爲一連續函數, 滿足$g(1)=5$ 且$\int_0^1 g(t)dt=2$ 。令

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2g(t)dt\text{ 。}$$

   試證

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt\text{ 。}$$

   並據此求$f''(1)$ 及$f'''(1)$ 。

9. 設g 在x 可微, f 在$u=g(x)$ 連續 。令

$$F(x)=\int_s^{g(x)} f(t)dt,$$

   求$dF(x)/dx$ 。

10. 設g_1, g_2 在x 皆可微, f 在$u_1 = g_1(x)$ 及$u_2 = g_2(x)$ 皆連續 。令

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

求$dF(x)/dx$ 。

11. 利用上題求下述各函數對x 之微分 。

(i) $f(x) = \int_0^{x^2}(1+t^2)^{-2}dt,$ (ii) $f(x) = \int_{x^2}^{x^3}\sin(1+t^2)dt,$
(iii) $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{t+\sin t}dt,$
(iv) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin\sqrt{x}}\sqrt{2+\cos t}dt$ 。

12. 求下述各不定積分 。

(i) $\int x\sin x^2 dx,$ (ii) $\int t^2\sqrt{1+t^3}dt$ 。

13. 設f 在$[a, b]$ 連續, 求使下式成立之條件 。

$$D(\int_a^x f(t)dt) = \int_a^x Df(t)dt\ 。$$

14. 設$f'(x)$ 在$x \geq 1$ 處連續, $a > 1$ 為一常數, $[\,\cdot\,]$ 表最大整數函數 。試證

(i) $\int_1^a [x]f'(x)dx = [a]f(a) - (f(1) + \cdots + f([a]));$

(ii) $\int_1^a [x^2]f'(x)dx = [a^2]f(a) - (f(1) + f(\sqrt{2}) + \cdots + f(\sqrt{[a^2]}))$ 。