# 第二章

# 積分與微分的簡介

## 2.8 合成函數及隱函數之微分

對幾個可微分函數, 我們已可處理其四則運算之微分。但對合成函數(許多函數皆以合成函數的形式出現), 簡單的如$\sin(x^2)$ 尚可由定義直接求其導數(見上一節之習題), 較複雜的怎麼辦? 本節我們便將給一關於合成函數微分之定理, 稱爲連鎖規則(clain rule)。有了此規則, 將可大幅度地增加我們所能微分的函數。先給一例子。

**例8.1.**設$f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1$, 則$(f \circ g)(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, 因此$(f \circ g)'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$。

上例是可先將$f \circ g$ 化簡, 然後利用以前有的結果算出$f \circ g$ 之導數。有時$f \circ g$ 並無法化簡, 如前述$\sin(x^2)$ 或$\sqrt{x^2 + \sin x}$。對$\sin(x^2)$, 我們知道$\sin x$ 及$x^2$ 之導數; 對$\sqrt{x^2 + \sin x}$, 我們也知道$\sqrt{x}$ 及$x^2 + \sin x$ 之導數, 這類的例子, 連鎖規則都適用。

**定理8.1.**設$f = u \circ v$, 且$v'(x)$ 及$u'(y)$ 皆存在, 其中$y = v(x)$。則$f'(x)$

存在, 且

$$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \text{ 。} \tag{8.1}$$

**證明.** 令$\xi = v(x+h) - y$, 且設$\xi \neq 0$ 。則$v(x+h) = y + \xi$, 且

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h} = \frac{u(y+\xi)-u(y)}{h} \\ &= \frac{u(y+\xi)-u(y)}{v(x+h)-v(x)} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &= \frac{u(y+\xi)-u(y)}{\xi} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \text{ 。} \end{aligned} \tag{8.2}$$

當$h \to 0$時, $\xi \to 0$ (此因$v$ 在$x$ 可微, 故$v$ 在$x$ 連續), 因此

$$\frac{u(y+\xi)-u(y)}{\xi} \to u'(y), \ \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \to v'(x),$$

故得證(8.1) 式 。

但因有可能對無限許多的$h$, 使得$\xi = 0$, 此時(8.2) 之成立可能就有問題了(若只有有限個$h$ 使得$\xi = 0$, 則沒問題, 爲什麼? ) 。此時我們須略微修正上述作法 。令

$$g(t) = \frac{u(y+t)-u(y)}{t} - u'(y), t \neq 0 \text{ 。} \tag{8.3}$$

由上式又得

$$u(y+t) - u(y) = t(g(t) + u'(y)) \text{ 。} \tag{8.4}$$

雖(8.3) 式只對$t \neq 0$ 才有意義, 但可看出(8.4) 式對所有$t$ 皆成立, 只要任給一有限的$g(0)$ 。又因$t \to 0$ 時, $g(t) \to u'(y) - u'(y) = 0$, 故我們令$g(0) = 0$, 如此$g$ 成爲一在0 連續之函數 。將$\xi$ 代入(8.4) 中之$t$, 且利用(8.2) 得

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(y+\xi)-u(y)}{h} \\ &= \frac{\xi}{h}(g(\xi) + u'(y)) \text{ 。} \end{aligned} \tag{8.5}$$

上式對$\xi = 0$ 仍成立 。令$h \to 0$, 因$\xi/h \to v'(x)$, 且$g(\xi) \to g(0) = 0$ (此因$h \to 0$ 時, $\xi \to 0$, 而$g$ 在0 連續), 故由(8.5) 仍得此時

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to v'(x)u'(y),$$

本定理證畢 。

(8.1) 式又可以下述簡潔的公式表示 。

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v' \text{ 。} \tag{8.6}$$

或利用萊布尼茲的記號, 令$z = u(v), y = v(x)$, 則

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ 。} \tag{8.7}$$

**例8.2.**令$f(x) = x\sqrt{x^2+4}$, 則

$$f'(x) = (x)'\sqrt{x^2+4} + x(\sqrt{x^2+4})' \text{ 。}$$

因$g(x) = \sqrt{x^2+4} = u(v(x))$, 其中$u(x) = \sqrt{x}, v(x) = x^2+4$, 而$u'(x) = 1/(2\sqrt{x}), v'(x) = 2x$, 故

$$(\sqrt{x^2+4})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \text{ 。}$$

因此

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \text{ 。}$$

**例8.3.**令$f(x) = \sin(x^2)$ 。因$(\sin x)' = \cos x, (x^2)' = 2x$, 而$\sin(x^2)$ 爲此二函數之合成, 故

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \text{ 。}$$

若令$y = x^2, z = f(x)$, 則$z = \sin y$, 因此利用(8.7)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos y \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x \text{ 。}$$

**例8.4.**令$f(x) = (v(x))^n$, 其中$n$ 爲一有理數, 且設$v'(x)$ 存在 。由於$f = u(v)$, 其中$u(x) = x$, 且$u'(x) = nx^{n-1}$, 故

$$f'(x) = n(v(x))^{n-1}v'(x) \text{ 。}$$

對一合成函數, 如果做得熟練, 當然可以直接寫出其導數而不用明確地將$u, v$ 等先寫出 。例如, 對函數$g(x)=\sqrt{x^2+4}$, 如何得到函數值? 給一$x$, 先得$x^2+4$, 再開方得$\sqrt{x^2+4}$ 。但求導數時是將前述步驟反過來 。先對$\sqrt{x}$ 微分, 其餘(即$x^2+4$)維持不變, 而$\sqrt{x}$ 之導數爲$1/(2\sqrt{x})$, 故先得$1/(2\sqrt{x^2+4})$, 其次$x^2+4$ 之導數爲$2x$ 。此二者相乘即得$2x/(2\sqrt{x^2+4})$ 。

另外, 萊布尼茲的公式(8.7) 式也提供我們一得到合成函數之導數的過程 。$z=u(v), y=v(x)$ 。我們要求$dz/dx$, 先經一媒介$y$, 即先求$dz/dy$, 但此非我們的目的, 要再乘上$dy/dx$ 才是對$x$ 之微分 。$dz/dy$ 及$dy/dx$ 二符號, 上一節已解釋過並非$dz$ 除以$dy$, 及$dy$ 除以$dx$ 的意思 。但在(8.7) 式之右側, 若想成$dy$ 是可“約分” 的, 便得左側$dz/dx$ 。這樣的將不該約分的二項約掉的想法, 的確可幫助我們了解此公式之內涵 。

定理8.1 也很容易可推廣至三個甚至任意有限個函數之合成的情況 。例如, 設$f=u\circ v\circ w$, 且設$w'(x), v'(y), u'(z)$ 皆存在, 其中$y=w(x), z=v(y)$ 。則$f'(x)$ 存在, 且

$$f'(x)=u'(z)v'(y)w'(x) 。\tag{8.8}$$

或寫成

$$(u(v(w)))'=u'(v(w))v'(w)w' 。\tag{8.9}$$

或令$\xi=f(x)$, 則有下述萊布尼茲的記號:

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\xi}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} 。\tag{8.10}$$

其次我們來看隱函數之微分 。大部分我們曾討論過的函數, 皆可明確地以一方程式表示出 。如由$y=x^3+1$, 定義出一函數$f(x)=x^3+1$, $f$ 之圖形也即爲上述方程式之圖形 。但並非每一函數皆可如此明確地定義出 。如對下述$x, y$ 之方程式

$$x^3-x=y^3-y^2+24, \tag{8.11}$$

或

$$y^2=\sin(x^2+y^2), \tag{8.12}$$

就不是很容易地可解出以$x$ 來表示$y$ (或以$y$ 來表示$x$) 。不過仍有可能存在一函數$f$, 使得

$$x^3 - x = f^3(x) - f^2(x) + 24,$$

對每一在$f$ 之定義域的$x$ 成立(對$y^2 = \sin(x^2 + y^2)$ 也可有類似的結果) 。此時我們便說該方程式隱含地定義出一函數 。

隱函數之微分往往可不經由解出該函數而得, 其中的過程便稱之爲隱函數之微分 。我們給一些例子, 大家便可了解此過程 。

**例8.5.**設$x, y$ 滿足(8.11), 且設$y = f(x)$ 。則將(8.11) 每一項對$x$ 微分, 得

$$3x^2 - 1 = 3y^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx},$$

因此解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{3y^2 - 2y} \text{ 。} \tag{8.13}$$

此處用到利用合成函數之微分,

$$\frac{dy^3}{dx} = \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx},\ \ \frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \text{ 。}$$

又在(8.11) 所描述之圖形上, 過(3, 1) 這點之切線爲何? 由(8.13), 此時切線斜率爲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 3^2 - 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 26,$$

故過(3, 1) 之切線爲

$$(y - 1) = 26(x - 3) \text{ 。}$$

**例8.6.**設$x, y$ 滿足$x^2 + y^2 = 16$ 。可看出此爲一半徑爲4 之圓的方程式 。一個圓並不是一函數圖形, 但上半圓$y = \sqrt{16 - x^2}$ 及下半圓$= -\sqrt{16 - x^2}$ 分別定義出函數 。利用隱函數之微分得

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

故

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\text{。} \tag{8.14}$$

在$x = 2$ 時$dy/dx$爲何? 由(8.14) 知, 要知道$y$ 之值才能得到$dy/dx$ 。而對每一$x$ (除了$x = 4$ 或$-4$), 有兩個$y$ 與其對應 。若給定$y = \sqrt{12}$, 則$dy/dx = -2/\sqrt{12}$; 若給定$y = -\sqrt{12}$, 則$dy/dx = 2/\sqrt{12}$ 。

利用隱函數之微分, 也可求反函數之導數 。設$y = f(x)$ 爲一1-1 函數, 且$f'(x)$ 存在 。以$g$ 表$f$ 之反函數, 即對$y$ 屬於某一集合, $x = g(y)$, 且

$$f'(g(y))g'(y) = 1, \tag{8.15}$$

或

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}, \tag{8.16}$$

只要$f'(x) \neq 0$ 。由(8.16) 知, 在某種意義下, 一函數之導數與其反函數之導數互爲倒數(reciprocal) 。當然值得注意的是, (8.16) 之推導並不嚴密, 因我們假設$g$ 對$y$ 可微 。事實上若$f$ 可微, 則對只要使$f'(g(x)) \neq 0$ 之$x, g'(x)$ 皆存在 。證明並不太難, 我們列於本節最後 。

**例8.7.**令$y = f(x) = x^3$ 爲一1-1 函數, 故$f$ 之反函數$g$ 存在, 且$x = g(y) = y^{1/3}$ 。則由(8.16)

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3y^{2/3}},$$

與直接由$g(y) = y^{1/3}$ 求導數所得相同 。

附帶一提, (8.16) 若以萊布尼茲的符號表示將更清楚, 即

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\text{。} \tag{8.17}$$

再強調一次, $dx/dy$ 或$dy/dx$ 整個是一個符號, 所以(8.17) 成立, 並非是因右側繁分數化簡等於左側 。但在微分裡, 有很多若採用萊布

尼茲符號後, 代數運算上便一致的公式 。這就是我們在上一節提過的, 萊布尼茲符號令人歎賞之處 。

**例8.8.**令$y = f(x) = x^q, x \geq 0$, 其中$q \geq 1$ 爲一正整數, 則

$$f'(x) = qx^{q-1}\ 。$$

又令$f$ 之反函數爲$x = g(y) = y^{q^{-1}}$ 。由(8.16) 得

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{qx^{q-1}} = \frac{1}{qy^{(q-1)/q}} = \frac{1}{q}y^{q^{-1}-1}\ 。$$

因此若將$x$ 與$y$ 交換(我們較習慣以$x$ 表函數之自變數), 便得

$$(x^{q^{-1}})' = q^{-1}x^{q^{-1}-1}\ 。$$

至於$x^{p/q}$ 之導數爲何? 因$x^{p/q} = (x^{q^{-1}})^p$, 利用合成函數之微分, 得

$$\begin{aligned} (x^{p/q})' &= p(x^{q^{-1}})^{p-1}(x^{q^{-1}})' \\ &= px^{(p-1)/q}q^{-1}x^{q^{-1}-1} \\ &= (p/q)x^{p/q-1}, \end{aligned}$$

此結果與(7.16) 一致 。

利用反函數之微分公式尚可求諸如反三角函數之導數, 我們留在第五章再討論 。最後我們證明反函數之微分公式 。

**定理8.2.**設$f$ 爲一在閉區間$[a, b]$ 中嚴格漸增且連續之函數, 又令$g$ 爲$f$ 之反函數 。若對某$x \in (a, b), f'(x)$ 存在且不爲0, 則$g'(y)$ 存在且不爲0, 其中$y = f(x)$, 且$g'(y)$ 滿足(8.16) 式 。

**證明.**設$f'(x)$ 存在且不爲0, 其中$x \in (a, b)$ 。令$y = f(x)$, 我們將證明

(8.18) $$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{1}{f'(x)}\ 。$$

令$h=g(y+k)-g(y), x=g(y)$, 則

$$h=g(y+k)-x,$$

且

$$x+h=g(y+k)\text{ 。}$$

將上式兩側取函數$f$, 得

$$y+k=f(x+h),$$

因此$k=f(x+h)-f(x)$ 。因$g$ 爲嚴格漸增(此由於$f$ 爲嚴格漸增), 故若$k\neq 0$, 則$h=g(y+k)-g(y)\neq 0$ 。因此若$k\neq 0$, 便有

$$\begin{aligned}\frac{g(y+k)-g(y)}{k} &= \frac{h}{f(x+h)-f(x)}\\ &= \frac{1}{(f(x+h)-f(x))/h}\text{ 。}\end{aligned}\tag{8.19}$$

因$g$ 在$y$ 爲連續(見第一章定理6.7), 故$k\to 0$ 時, $h=g(y+k)-g(y)\to 0$ 。即$k\to 0$ 時, $h\to 0$ 。故在(8.19) 中, 令$k\to 0$, 則最左側$\to g'(y)$, 而最右側$\to 1/f'(x)$ 。證畢 。

# 習 題 2.8

1. 求下述函數之微分 。

   (i) $f(x)=(2x+x^2)^{3/2}$, (ii) $f(x)=(x-x^{-2})^{1/2}$,
   (iii) $f(x)=(1+\sqrt{x})\sqrt[3]{x^2+x}$, (iv) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sin(x^2)}$,
   (v) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, (vi)$f(x)=\sin^n x\cos(nx)$,
   (vii) $f(x)=\sin(\sin(\sin x))$, (viii) $f(x)=\sin^2 x\sin(x^3)$,
   (ix) $f(x)=x^2\sqrt{1+x^2}/(1+\sqrt{x})$,
   (x) $f(x)=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$ 。

2. 設$f(x)=1+x^6, g(x)=x^3, h(x)=x+x^{-1}$ 。令$y=f(g(h(x)))$, 求$dy/dx$ 。

3. 令$f(x) = (1 + x^{-1})^{-1}, x \neq 0, g(x) = (1 + f^{-1}(x))^{-1}$ 。求$f'(x)$及$g'(x)$ 。

4. 分別對下述函數, 求$g'(x)$ 。

   (i) $g(x) = f(x^2)$, (ii) $g(x) = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$,
   (iii)$g(x) = f(f(x))$, (iv) $g(x) = f(f(f(x)))$ 。

5. 令$y = x\sqrt{x^2 + 1}$, 求在其圖形上於$x = 0$ 之切線 。

6. 設$f, g$ 皆對$x$ 可微, 試導出下述萊布尼茲的乘積微分公式 。

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x) \text{ 。}$$

7. 利用隱函數微分法求$dy/dx$ 。

   (i) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r$ 爲一常數,
   (ii) $x - y^3 - 3xy^2 = 0$,
   (iii) $(x + y)(x - y)^{-1} = y^{-1}$ 。

8. 對下述各方程式所定義出之$y = f(x)$, 分別求$f'(x)$ 及$f''(x)$ 。

   (i) $x = (y^5 + y + 1)/(y^2 + y + 1)$,
   (ii) $x = (1 - \sqrt{y})/(1 + \sqrt{y})$,
   (iii) $y + \sqrt{xy} = x^2$,
   (iv) $x^2y^2 + xy = 2$ 。

9. (i) 設$y = 2x^3 - x$, 試證$y'' = xy'''$;

   (ii) 設$y = \sqrt{4x^2 + 1}$, 試證$yy' = 4x$;

   (iii) 設$y = \sqrt{x^2 + ax}$, 試證$x^2 + y^2 = 2xyy'$;

   (iv) 設$y = \sqrt{ax^2 + bx}$, 試證$y = -b^2/(4y^3)$ 。

10. 試證二曲線$3y = 2x + x^4y^3$ 及$2y + 3x + y^5 = x^3y$, 在原點之切線互相垂直 。

11. 在下述各圖形上求過所給定的點之切線。

(i) $xy = 4, (-2, -2)$, (ii) $x + x^2y^2 - y = 1, (1, 1)$,
(iii)$x^2 + xy + y^2 = 3, (1, 1)$, (iv) $x^3 + y^3 = 6xy, (3, 3)$。

12. 對$0 < x < 5$, 方程式$x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ 定義出$y$ 爲一$x$ 之函數。不經由解出$y$, 試證$y'$ 皆同號(假設$y'$ 存在)。

13. 方程式$3x^2 + 4y^2 = 12$ 定義出$y$ 爲二$x$ 之隱函數, 其中$|x| \leq 2$。設$y''$ 存在, 試證$4y^3y'' = -9$。

14. 方程式$x \sin xy + 2x^2 = 0$ 定義出$y$ 爲一$x$ 之函數。設$y'$ 存在, 試證$y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \sin xy + 4x = 0$。

15. 方程式$x^3 + y^3 = 1$ 定義出可能不只一個$y$ 爲$x$ 之函數。

(i) 設$y'$ 存在, 不經由解出$y$, 試證$x^2 + y^2y' = 0$;

(ii) 設$y''$ 存在, 試證$y'' = -2xy^{-5}$, 只要$y \neq 0$。

16. 令

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x)\,, & x \neq 0, \\ 0 & ,\quad x = 0 \text{。} \end{cases}$$

試分別討論$f_1$, $f_2$, $f_3$及$f_4$ 之(i) 的連續性, (ii) 可微性, (iii) 導數之連續性及可微性。

# 參考文獻

**1.** Apostol, T. M. (1967). *Calculus*, Vol I, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, New York.