第二章

積分與微分的簡介

2.7 導數的定義及基本性質

在小學的數學裡我們學過, 若在3 小時裡走了12 公里, 則速度爲$12 \div 3 = 4$, 即每小時4 公里。這裡面其實是做了一個假設, 即是以等速在行走。只要是等速行走的, 均可以此方式求出速度。當然, 從乘坐機車或汽車的經驗中, 車子在每一時刻的速度似乎不盡相同, 也就是車子並非以等速在行進。在物理中, 我們也學過自由落體也並非以等速落下。對不等速的運動, 我們就不能只說速度了, 而必須講明是那一時刻的速度。至於如何求某一時刻之速度呢?

設某汽車在高速公路上行駛, 且令$f(x)$ 表在時間x, 自某點量起汽車之位置。則自時間x 至時間$x+h$, 汽車走了$f(x+h)-f(x)$, 因此在這段期間之平均速度爲

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{。}$$

可看出小學裡求出的所謂速度, 其實是平均速度。上述h 並不一定要大於0, 若$h<0$, 則$x+h<x$, 此時

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)-f(x+h)}{-h}$$

表自時間$x+h$ 至x, 汽車之平均速度。因此不論h 爲正或負, $(f(x+h)-f(x))/h$ 表在時間x 附近一時區, 汽車之平均速度。$|h|$ 可以任意小, 但不能爲0, 而若只知在x 之位置$f(x)$, 是無平均速度可言。若令$h \to 0$, $(f(x+h)-f(x))/h$ 會趨近到什麼? 當然, 先決條件是此極限要存在。而若存在, 此極限代表的意義爲何? 你可能想到了, 可將此極限視爲在時間x 之瞬間速度(instantaneous velocity)。

純粹從數學的觀點來看, 前述$f(x)$ 不一定要表距離, 而可表在時間x 之某種量, 如高度、溫度、生產量等。所以$(f(x+h)-f(x))/h$ 即表在時區$[x, x+h]$ 間之平均增加的量。令$h \to 0$, 該極限即爲瞬時增加量, 或說變化率。我們給一定義如下。

定義7.1.函數f 在x 之導數(derivative), 以$f'(x)$ 表之(讀做f prime of x), 其定義爲

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{7.1}$$

只要上述極限存在。$f'(x)$ 又稱爲f 在x 之變化率(the rate of change of f at x)。而若(7.1) 之極限存在, 便稱f 在x 可微(differentiable)。若f在定義域中每點皆可微, 便說f 是一可微函數(differentiable function), 或說f 可微。若f 在x 連續, 則$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+}(f(x+h) - f(x))/h$, $f'_-(x) = \lim_{h\to 0-}(f(x+h) - f(x))/h$, 分別稱爲$f$ 在x 之右導數及左導數, 二者皆稱單側導數(one-sided derivatives)。又若$f'_+(x) = \infty$, 且$f'_-(x) = \infty$, 則稱f 在x 之導數$f'(x) = \infty$ (因∞ 並非一實數, 故此時導數並不存在)。同理可定義$f'(x) = -\infty$。

立即可看出f 在x 可微, 若且唯若f 在x 之右導數及左導數皆存在, 且二者相等。設$-\infty \le a < b \le \infty$, 若$f$ 對(a,b) 中每一點皆可微, 我們便說f 在(a,b) 中可微。若$a \ne -\infty$, 而f 在(a,b) 可微, 且在$x=a$ 之右導數存在, 則說f 在$[a,b)$ 中可微, 同理可定義f 在$(a,b]$ 或$[a,b]$ 中可微。前面多次提過, 牛頓及萊布尼茲的重大貢獻爲結合積分與微分。微分中的主要想法就是導數的概念。如同積分是起源於幾何問題中的求面積, 導數也是起源於幾何中, 求在平面上

一曲線上某點之切線斜率。但不像積分起源的如此早, 遲至十七世紀初費馬欲決定某些函數之極大及極小值, 才有了導數的概念。

大家在中學時代都學過切線(tangent line)。在圓上某點, 與該點及圓心相連線段垂直的直線, 便是圓的一切線。不過橢圓上的切線, 甚至任一曲線上的切線, 就無法如此定義了, 我們先接受切線的概念好了。因如圓的外切正多邊形等, 我們過去均輕易地接受, 而未追究其定義。假設平面上有一曲線, 且在曲線上每一點皆有一切線存在。圖7.1 以虛線描繪出在幾個點的切線。費馬注意到在曲線上的極大及極小處, 切線爲水平。因此若要找極值, 似乎只要找出何處有水平切線即可。

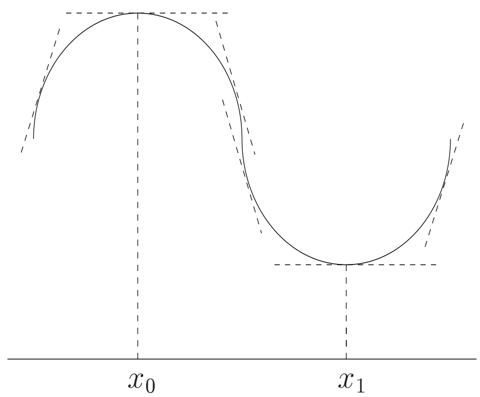


圖7.1. 曲線在x_0 及x_1 有水平切線

你可能會猜出後來的演變了。費馬等數學家推廣上述想法, 而求曲線在任何一點之切線斜率, 然後當然就一直探討下去, 終於發展出微分學。

乍看之下, 積分與微分是毫不相干的。求曲線下所圍出的面積, 似乎不像是與求曲線上某點之切線斜率有何關聯。第一位發現到此二者應有密切關係的是牛頓在劍橋大學(Cambridge University)的老師arrow。但牛頓及萊布尼茲爲首先體會到二者之間關係之重要性, 並完全建立起其間之關係。此關係(微積分基本定理), 便將數學之發展開創出一空前的新紀元。

雖然導數是起源於求切線的問題, 但如本節一開始所討論的, 後來立即發現導數也提供一求速度及各種變化率的方法。

在給一些例子之前, 附帶一提(7.1) 式與下式等價:

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} 。 \tag{7.2}$$

有時我們會以上式來求導數。

例7.1. 令$f(x) = x^2$, 求f'。

解. 對$\forall x \in R$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

存在。故$f'(x) = 2x, \forall x \in R$, 即$f$ 爲一可微函數。

例7.2. 令$f(x) = 1/x$, 求f'。

解. 對$\forall x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{-1} - x^{-1}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2} 。\end{aligned}$$

故$f'(x) = -x^{-2}, \forall x \neq 0$。

例7.3. 令$f(x) = \sqrt{x}$, 求f'。

證明. 對$\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} 。\end{aligned}$$

上述極限對$\forall x > 0$ 皆成立。故$f'(x) = (2\sqrt{x})^{-1}, \forall x > 0$。

在上例中, 雖f 之定義域爲$[0, \infty)$, 但f 在0 不可微。經微分後所得之f' 亦爲一函數, 但定義域不一定與f 之定義域相同。簡單地

講, f' 之定義域$=f$ 之定義域 $\setminus\{f$ 不可微的點$\}$ 。

例7.4.令$f(x)=x^n$, 其中n 爲一正整數, 求f' 。
解.對$\forall x\in R$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1},$$

我們省略了中間的計算過程 。故$f'(x)=nx^{n-1},\forall x\in R$ 。

例7.5.設$f(x)=c,\forall x\in R$, 求f' 。
解.因$f(x+h)-f(x)=c-c=0$, 故$f'(x)=0,\forall x\in R$ 。

將上二例結合, 即得對每一非負整數n,

$$(x^n)'=nx^{n-1}\text{ 。}\tag{7.3}$$

例7.6.令$f(x)=\sin x$, 求f' 。
解.首先

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\sin(x+h)-\sin x\\&=2\sin(h/2)\cos(x+h/2)\text{ 。}\end{aligned}$$

又$h\to 0$ 時,

$$\frac{\sin(h/2)}{h}=\frac{\sin(h/2)}{h/2}\frac{1}{2}\to\frac{1}{2},$$
$$\cos(x+h/2)\to\cos x\text{ 。}$$

故

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x=\cos x\text{ 。}$$

因此sine 函數之導數爲cosine 函數, 我們可以

$$(\sin x)'=\cos x,x\in R,\tag{7.4}$$

表之。

例7.7.令$f(x)=\cos x$, 求f'。
解.仿上例, 利用

$$\cos(x+h)-\cos x=-2\sin(h/2)\sin(x+h/2),$$

不難得到$f'(x)=-\sin x$。我們以

$$(\cos x)'=-\sin x, x\in R, \tag{7.5}$$

表之。

至於其他三角函數的微分我們留在習題。在第2.5 節中, 我們曾看到sine 函數與cosine 函數之積分關係密切。上二例指出二者之微分亦有簡單的關係。若將兩個結果併在一起看, 微分與積分的互爲可逆運算, 已隱然若現。

導數既然可表切線斜率(雖我們尚未説明如何由導數求切線), 直觀上一函數在某點必須連續, 才可能有切線存在, 也才可能可微。這就是底下的結果。

定理7.1.設函數f 在點x 可微, 則f 在x 連續。
證明.先有下述等式:

$$f(x+h)-f(x)=h\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h\neq 0。$$

令$h\to 0$, 因$(f(x+h)-f(x))/h\to f'(x)$, 故

$$f(x+h)-f(x)\to 0\cdot f'(x)=0。$$

得證。

不過連續函數不一定可微。例如, 令$f(x)=|x|$, 則f 爲一到處連續之函數。但因

$$(f(0+h)-f(0))/h=|h|/h,$$

當$h \to 0$ 時, 極限不存在(右極限爲1 左極限爲-1), 故在$x = 0$ 不可微。

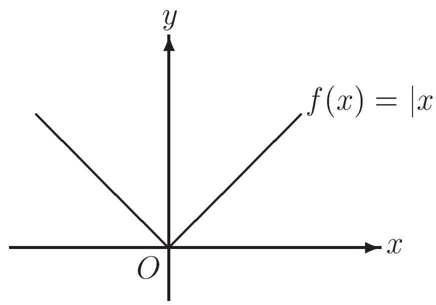
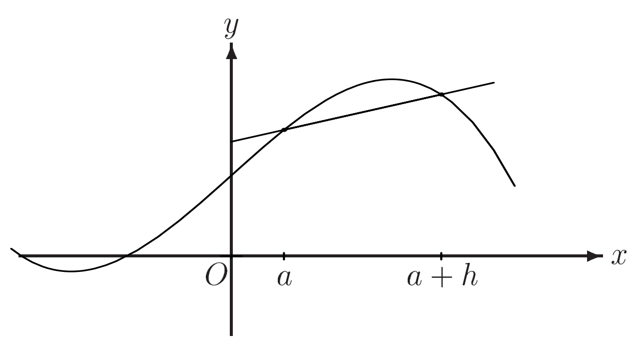


圖7.2. $f(x) = |x|$之圖形

可微是一個比連續還強的條件, 若知一函數在某點可微, 便知此函數在該點亦連續了。一在某點x 可微之函數經微分後所得之函數, 不一定仍在x 可微, 甚至也不一定在x 連續。導數爲一新的函數, 原來函數有的性質, 導數不一定會有, 在習題中可看到一些例子。

導數也可由幾何來解釋。$(f(a+h) - f(a))/h$, 表在$y = f(x)$ 之圖形上, 連接$(a, f(a))$ 與$(a+h, f(a+h))$ 二點之直線(稱爲割線(secant line))之斜率。令$h \to 0$, 也就是讓$a + h$ 一直接近a, 若前述割線斜率之極限存在, 則極限時的割線就視爲在$(a, f(a))$ 之切線, 見圖7.3。



若$h\to 0$ 時, $|(f(a+h)-f(a))/h|\to\infty$, 則當$h\to 0$時, 割線會愈來愈陡。此時在$(a,f(a))$ 之切線即定義爲垂直線$x=a$。至於對$f(x)=|x|$, 在$x=0$ 並無切線存在。此因在圖形上連接$(0,0)$ 與其右側任一點之割線斜率恆爲1, 而連接$(0,0)$ 與其左側任一點之割線斜率恆爲-1, 故割線斜率之極限不存在, 因此f 在$x=0$ 不可微。我們寫一定義如下。

定義7.2. 在$y=f(x)$ 之圖形上一點$(a,f(a))$ 之切線爲

(i) 過$(a,f(a))$ 且斜率爲$f'(a)$ 之直線, 若$f'(a)$ 存在;

(ii) 直線$x=a$, 若$\lim_{h\to 0}|(f(x+h)-f(x))/h|=\infty$。

除了 (i)或(ii) 的情況, 圖形在$(a,f(a))$ 之切線不存在。

不難看出在(i) 的情況, 切線方程式爲

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\text{。}\tag{7.6}$$

至於在$(a,f(a))$ 之法線(normal line) 的定義爲過$(a,f(a))$ 且與切線垂直之直線。故若$f'(a)\neq 0$, 則法線斜率爲$-1/f'(a)$, 且方程式爲

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\text{。}\tag{7.7}$$

若$f'(a)=0$, 則法線爲垂直線$x=0$, 若切線爲垂直線$x=0$, 則法線爲水平線$y=f(a)$。

例7.8. 求在$f(x)=x^2$ 之圖形上, 在點$(2,4)$ 之切線及法線。

解. 因$f'(x)=2x$, 故$f'(2)=4$。因此切線爲

$$y-4=4(x-2)\text{。}$$

而法線爲

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\text{。}$$

如同求極限時, 有一關於四則運算的定理, 導數亦有下述對應的定理。

定理7.2. 設二函數f 、g 有相同之定義域, 且設f 、g 皆在某一點x 可微 。則$f+g, f-g, fg, f/g$ 皆在x 可微(對於f/g, $g(x)$ 須不為0) 。又此時

(i) $(f+g)'=f'+g'$,

(ii) $(f-g)'=f'-g'$,

(iii) $(fg)'=f'g+fg'$,

(iv) $(f/g)'=(gf'-fg')/g^2$ 。

證明.(i)欲求$f+g$ 在x 之導數, 先寫出下式 。

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}\\&=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\text{ 。}\end{aligned}$$

當$h\to 0$ 時, 因f 及g 皆在x 可微, 因此上式右側兩項分別趨近至$f'(x)$ 及$g'(x)$ 。故得證 。

(ii) 仿(i) 便可得證 。

(iii) 依定義要求

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

當$h\to 0$ 時之極限 。經過加一項及減一項$g(x)f(x+h)$, 得$h\to 0$ 時,

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&\to g(x)f'(x)+f(x)g'(x)\text{ 。}\end{aligned}$$

此處用到可微導至連續, 所以$h\to 0$ 時, $f(x+h)\to f(x)$ 。得證 。

(iv) 我們先證(iv) 之一特例(即取$f(x)\equiv 1$)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}\text{ 。}\tag{7.8}$$

此式若證出, 則利用(iii), 由下式便得證了。

$$\left(f\frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{g}f' + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}\text{ 。}$$

而(7.8) 式又由下式便立即看出得證。

$$(7.9)\quad \frac{1/g(x+h) - 1/g(x)}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x+h)}\text{ 。}$$

此處仍用到因g 在x 可微, 所以g 在x 連續, 因此當$h \to 0$ 時, $g(x+h) \to g(x)$。

若$g(x)$ 爲常數函數, 如$g(x) = c, \forall x \in R$, 則因$g'(x) = 0$, 故由上定理之(iii) 得

$$(7.10)\qquad (cf)' = cf'\text{ 。}$$

此結果再結合(ii), 便得下述推論。

系理7.1. 設$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 皆在x 可微, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 爲常數, 則

$$(7.11)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'\text{ 。}$$

附帶一提, 欲(7.9) 式有意義, 對夠小的$h, g(x+h)$ 要不爲0 才行。因已知$g(x) \neq 0$, 故由第一章引理6.1, 保證這件事沒問題。又由上定理之(iii), 亦不難得到下述推論。

系理7.2. 設$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 皆在x 可微, 則

$$(7.12)\qquad (\prod_{i=1}^{n} f_i)' = \sum_{i=1}^{n}(f_i' \prod_{j\neq i} f_j)\text{ 。}$$

上式中$\prod_{j\neq i} f_j$ 表除了f_i, 將$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 相乘。

例7.9. 設有一多項式$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$。先由(7.3) 式$(x^i)' = ix^{i-1}$,

$\forall i \geq 0$, 再由系理7.1 即得

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} ic_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} ic_i x^{i-1},$$

爲一$n-1$ 次之多項式 。

例7.10.設$f(x) = p(x)/q(x)$ 爲一有理式, 其中$p(x)$、$q(x)$ 皆爲多項式, $q(x) \neq 0$ 。則由定理7.2之(iv) 可得$f'(x)$ 。特別地, 若$p(x) = 1, q(x) = x^m$, 即$f(x) = 1/x^m, m \geq 1, x \neq 0$, 則

$$f'(x) = \frac{x^m \cdot 0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} = -mx^{-m-1} \text{ 。}$$

由上式及(7.3) 式便得下述較一般的對每一整數n,

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ 。} \tag{7.13}$$

當然若$n \leq -1$, 則x 須不爲0 。

例7.11.設$f(x) = \sin x/(x^2-4)$, 則

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)\cos x - 2x\sin x}{(x^2-4)^2} \text{ 。}$$

至於f' 的定義域與f 之定義域相同, 皆爲$R \setminus \{2, -2\}$ 。

例7.12.在(7.13) 式中, 我們得到對每一整數n, x^n 之導數 。至於$f(x) = x^\alpha, x > 0$, 其中$\alpha = p/q$ 爲一有理數, 其導數爲何? 先設α 爲正, 且設p, q 爲二正整數 。則

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{p/q} - x^{p/q}}{h} \text{ 。} \tag{7.14}$$

令$x^{1/q} = \xi, (x+h)^{1/q} = \xi_1$ 。仿第一章例4.1 之作法, 可得

$$\lim_{x \to a} x^{1/q} = a^{1/q}, a \geq 0 \text{ 。} \tag{7.15}$$

故$\lim_{h\to 0}(x+h)^{1/q}=x^{1/q}$, 即$h\to 0$ 時, $\xi_1\to\xi$ 。因此(7.14) 式成爲

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\xi_1^p-\xi^p}{\xi_1^q-\xi^q}=\frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\cdots+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\cdots+\xi^{q-1}}\text{ 。}$$

由上式即得(利用$h\to 0$ 時, $\xi_1\to\xi$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{p\xi^{p-1}}{q\xi^{q-1}}=\alpha\xi^{p-q}=\alpha x^{\alpha-1}\text{ 。}$$

至於若$\alpha<0$, 仍有相同的結果, 此部分留在習題中 。故得對每一有理數α (若$\alpha<1$, 可微的範圍要加以討論, 與p,q 之值有關),

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\text{ 。}\tag{7.16}$$

例7.13.設$y=f(x)=x^{1/3},x\geq 0$, 則$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3},x>0,f$ 在$x=0$ 之右導數不存在 。因$h\to 0$時, $|(f(0+h)-f(0))/h|\to\infty$, 故定義$f$ 在$(0,0)$ 之切線爲垂直線$x=0$ 。見圖7.4 。

另外, 若$f(x)=x^3,x\in R,f'(x)=3x^2,f'(0)=0$, 故$f$ 在$(0,0)$之切線爲水平線$y=0$, 而法線爲垂直線$x=0$ 。讀者可試繪此時$y=f(x)$之圖 。

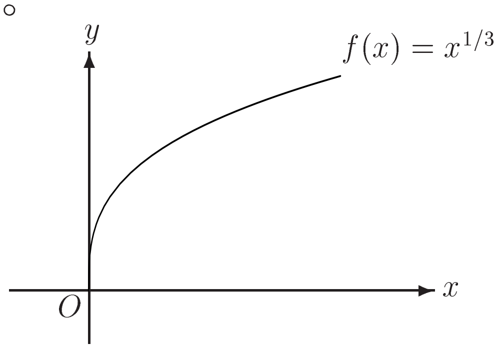


圖7.4. $f(x)=x^{1/3}$ 之圖

至於若$f(x)=\sqrt{x}$, 此函數定義在$x\geq 0$ 。在$x=0,f(x)$ 無左導數, 且右導數爲∞ (因此不存在) 。在$x=0$ 之切線即爲y 軸 。

最後設$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}, x \geq 0$。則$f$ 在0 之右導數爲$+\infty$ (所以不存在)。如圖7.5 可看出此時$y = f(x)$ 之圖形在$x = 0$ 之切線亦爲y 軸。

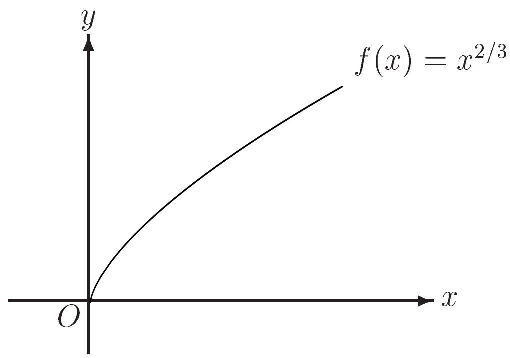


圖7.5. $f(x) = x^{2/3}$

對所謂分段定義的函數, 在連接點之導數要小心處理, 見下例。

例7.14.設

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \quad\quad, & x \geq 0, \\ 3\cos x - 1\,, & x < 0\text{。} \end{cases}$$

對$x > 0, f(x) = x^2 + 2$, 故$f'(x) = 2x$; 對$x < 0, f(x) = 3\cos x - 1$, 故$f'(x) = -3\sin x$, 皆無問題。至於$f$ 在$x = 0$ 之導數呢? 不能因$x \geq 0$ 時, $f(x) = x^2 + 2$, 就以爲$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$。因在$x = 0$ 之導數與在0 附近f 之值皆有關, 而在0 之左側, f 並非$x^2 + 2$ 的型式。故只好由定義來求在$x = 0$ 之導數。首先$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 2$, 故$f$ 在$x = 0$ 連續。若f 在$x = 0$ 不連續(譬如說在$x \geq 0$ 處將f 改爲$f(x) = x^2 + 3$), 則f 在$x = 0$ 必不可微, 那本問題便完全解決了。現在因f 在$x = 0$ 連續, 所以尚須繼續討論。

我們分別考慮在$x = 0$ 之右導數及左導數, 得

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 + 2 - 2}{h} = 0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{3\cos h-1-2}{h}$$
$$=3\lim_{h\to 0-}\frac{\cos h-1}{h}=0,$$

二者相等且皆爲0, 故$f'(0)=0$ 存在 。即

$$f'(x)=\begin{cases}2x \quad , & x\ge 0,\\ -3\sin x\,, & x<0\text{ 。}\end{cases}$$

又f' 仍爲一到處連續之函數, 且仿上之討論可得, f' 除了在$x=0$ 外皆可微 。

讀者也可自行驗證, 若稍改變一下f, 令$f(x)=x^2+2x+2, x\ge 0$, 其餘不變 。則f 在$x\neq 0$ 處皆可微, 而在$x=0$ 仍連續但不可微 。

再強調一次, 對這種分段定義的函數, 在交接點(如本例中之$x=0$) 之導數, 要特別留意 。前面已説過對本例, 是$f'(x)=2x$, "$\forall x>0$", 而非$f'(x)=2x$, "$\forall x\ge 0$" 。而且, 也不能因此就立即下結論

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}(2x)=0$$

(雖然本例中這答案是對的) 。舉例而言, 設有一函數$f(x)=1$, $\forall x>0$, $f(x)=-1$, $\forall x<0$, 且$f(0)=0$ 。因f 在$x=0$ 不連續, 故f 在$x=0$ 當然不可微 。又$f'(x)=0$, $\forall x\neq 0$, 故$\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0-}f'(x)=0$ 。因此

$$\lim_{x\to 0+}f'(x)\neq f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}=\infty,$$

且

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)\neq f'_-(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-1}{h}=\infty\text{ 。}$$

不過在某些條件下, 對一函數f, $\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$ 是會成立的, 見第四章定理1.6 。習題中尚有一些關於分段定義函數之導數, 可供各位練習 。

本節最後, 我們對微分的符號做一些補充説明 。

在數學的發展中, 符號一直扮演著重要的角色 。$+$ 、$-$ 、$\times$ 、$\div$ 、$=$ 、$\sqrt{\quad}$ 、e 、π 、i 等皆是符號 。有些符號如$x^n, n!$, 可將一段很長的敘述, 以一簡潔的形式來表示 。其他如$\int_a^b f(x)dx$, 並不只是提醒我們積分如何得到(即$\sum f(x_i)\Delta x_i$之極限), 並讓我們能執行計算, 求積分值 。

不過有時可能有幾個不同的符號皆表相同的意義, 視不同的情況而採用 。微分裡便有幾個符號並存 。前面採用的記號f' 爲Lagrange(1736-1812) 在十八世紀末所引進 。此記號強調微分後得到一新的函數, 而f' 在x 之值以$f'(x)$ 表之 。若令$y = f(x)$, 則y' 也可用來表示導數$f'(x)$ 。由於f' 仍爲一函數, 故我們可對函數f' 再微分而得到二階導數(second derivative) $f'' = (f')'$ 。而f'' 之導數便是三階導數, 即$f''' = (f'')'$ 。一般而言$f^{(4)} = (f''')', \cdots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, 或以$y'', y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$ 表之 。只要所得之函數仍可微, 便可繼續微分, 而得下一階導數, 這些統稱高階導數(higher derivatives) 。Lagrange 的符號與牛頓所採用的$\dot{y}$, $\ddot{y}$,$\cdots$ 差異並不大 。在某些地方, 如物理上的速度及加速度仍採用牛頓的符號 。

另外尚有一些符號, 如在西元1800 年, Arbogast (1759−1803), 以Df 表f 之導數, 此符號也普遍地被使用 。符號D 便稱爲一微分運算(differentiation operation), 此符號告訴我們Df 爲一由f 經微分後得到的新函數 。高階導數則以$D^2 f, D^3 f, \cdots, D^4 f$表之 。而在$x$ 之值以$Df(x), D^2 f(x)$, $\cdots$, 表之 。在D 符號下, 很容易將以前的公式轉換過來 。如

$$\begin{aligned} &D\cos x = -\sin x, D^2\cos x = D(-\sin x) = -\cos x, \\ &D(f+g) = Df + Dg \text{ 。} \end{aligned}$$

但要留意, D^2 爲二次微分, $D^2 f = D(Df)$ 而不是$(Df)^2$ 。

在數學分析方面的早期發展中, 萊布尼茲算是最能體會妥善選取符號之重要的數學家 。他經常花很多功夫與其他數學家討論各種符號之優劣 。微積分之所以能在現代數學的發展中產生重大的影響, 部分原因即爲其建全及富有聯想力的符號, 而這其中多半源自萊布尼茲 。

萊布尼茲發展出一套與前面所提迴然不同的符號。令$y = f(x)$, 他以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示$(f(x+h) - f(x))/h$, 並稱之爲差分商(difference quotient), 即以Δy 表$(f(x+h)-f(x))$, Δx 表h。符號Δ 稱爲差分運算(difference operator)。在極限時, 即令$h \to 0$, 差分商趨近至$f'(x)$, 萊布尼茲以$\frac{dy}{dx}$(或dy/dx) 表此極限, 即

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\text{。}$$

萊布尼茲不只採用不同的微分符號, 他對導數的想法也與他人不同。他認爲兩個"無限小的"量dy 與dx (稱做微分的(differentials)) 之商, 即爲dy/dx, 他並將導數dy/dx 稱爲微分商(differential quotient)。萊布尼茲將dy, dx 想像成完全新的數, 雖不是0, 但其絕對值卻小於任意正數。

雖然萊布尼茲並無法對上述無限小的之概念給出一令人較滿意之定義, 他及其門徒卻能自由地運用此種符號發展其微積分的理論。但有許多人卻因此覺得微積分有些不可思議(dy/dx 整個是一個符號, 而非dy 除以dx, 但有時又可拆開成dy, dx), 並開始懷疑那些運算方法的正確性。直到十九世紀, 柯西及其他數學家, 才逐漸以極限的概念來取代"無限小的" 此概念。但無論如何, 萊布尼茲的無限小的之概念, 對許多人了解微積分卻有相當幫助。這種思維的方式, 直觀上較易接受, 並且可較快地得到實際上是正確的結果。

雖然有些萊布尼茲的想法後來被發現並不正確, 但他所採用的符號卻廣爲流傳。以符號dy/dx 來表示導數, 可顯示出得到導數的過程。以後我們會繼續發現, 採用此符號, 有些公式可較輕易記住及去運用。

利用萊布尼茲的符號, 有下述表示法:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}\text{。}$$

若以D 的符號則爲$D^n y$ 或$D^n f$ 。若有二可微函數$u = f(x), v = g(x)$, 則

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \text{ 。}$$

而有時也以$\frac{df}{dx}$ 來表示f' 。若$y = f(x)$, 要表示導數在某點a 之值, 也可採用

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \text{ 或 } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} \text{ 。}$$

最後我們說明萊布尼茲二階導數符號的由來, 其餘高階導數的符號也可類似地得到 。

萊布尼茲將二階導數視爲二階差分商之極限 。令$x_1 = x + h$, $x_2 = x + 2h$ 。所謂二階差分商即爲一階差分商之一階差分商 。即

$$\frac{1}{h}\left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y}{h}\right) = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y),$$

其中$y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$ 且$y_2 = f(x_2)$ 。若以Δx 表h, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, 且$\Delta y = y_1 - y$, 則

$$y_2 - 2y_1 + y = \Delta y_1 - \Delta y = \Delta(\Delta y) = \Delta^2 y \text{ 。}$$

即$y_2 - 2y_1 + y$ 可視爲y 之差分(即Δy) 的差分, 即二階差分 。因此利用上述符號, 二階差分商可寫爲$\Delta^2 y/(\Delta x)^2$, 其中分母爲Δx 的平方, 而分子爲y 之二階差分, 兩處的“2” 之意義不同 。二階導數因此可表示爲

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} \text{ 。}$$

上式便爲萊布尼茲以d^2y/dx^2 表二階導數的由來 。

附帶一提, $\Delta\Delta = \Delta^2$ 表差分的差分, 即二階差分 。又二階差分商的極限便爲二階導數, 此事其實尚須證明 。因我們是將二階導數定義爲一階導數之一階差分商的極限, 即

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f'}{h} \text{ 。}$$

只要二階導數連續, 此二定義便等價 。不過因我們只是想讓大家對萊布尼茲的符號有個概念, 因此便略去證明 。

習 題 2.7

1. 求下述各函數之導數, 及f' 之定義域, 可利用已知的定理 。

 (i) $f(x)=x^3+\sin x$,
 (ii) $f(x)=x^{3/2}\sin x$,
 (iii) $f(x)=(x+1)^{-1}, x\neq -1$,
 (iv) $f(x)=(x^2+1)^{-1}+x^5\cos x$,
 (v) $f(x)=(2+\cos x)^{-1}$,
 (vi) $f(x)=(x^2+x\sin x)/(x^3+\cos x)$,
 (vii) $f(x)=\sqrt{x}/(1+x^2)$,
 (viii) $f(x)=x/(1+\sqrt{x})$,
 (ix) $f(x)=(1+2x^{-1})(2+x^{-2})$,
 (x) $f(x)=(x^2-x^{-2})^2$ 。

2. 依定義求下列各函數之導數, 並寫出f' 之定義域 。

 (i)$f(x)=\sqrt{3x-2}$, (ii) $f(x)=(2x-5)^{-1/2}$,
 (iii) $f(x)=\sin(x^2)$, (iv) $f(x)=\cos(x^3)$ 。

3. 試驗證

 $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\tan x\sec x$,
 $(\cot x)'=-\csc^2 x$, $(\csc x)'=-\cot x\csc x$,

 當然這些式子成立的先決條件是, 每一式子中的x 要使左右皆有意義 。

4. 求下述函數之微分, 其中函數皆定義在使其有意義處 。

 (i) $f(x)=\tan x\sec x$, (ii) $f(x)=\sin x/x$,
 (iii) $f(x)=x\tan x$, (iv) $f(x)=(x+\sin x)^{-1}$,
 (v) $f(x)=(x+\cos x)^{-1}$,
 (vi) $f(x)=(x^2+\cos x)/(2x^2)+\sin x$ 。

5. 設$f(x) = x^2 - 3x + 2$。求圖形在$x = -2$ 之切線及法線。

6. 設$f_1(x) = 3x^2, f_2(x) = 2x^3 + 1$。試證二者之圖形在點$(1, 3)$ 相切, 即二者在該點有相同的切線。

7. 設$f(x) = x^2, x > 0, = 0, x \leq 0$。求$y = f(x)$ 之圖形在$(0, 0)$ 之切線。

8. 利用公式

$$1 + x + \cdots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1), x \neq 1,$$

經由微分分別求出下述二和之公式。

(i) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,

(ii) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$。

9. 求下述各函數之導數, 並求f' 之定義域。

(i) $f(x) = |x^2 - 4|$, (ii) $f(x) = |x^3 - 1|$,
(iii) $f(x) = (|x| - |x + 1|)^3$, (iv) $f(x) = x^3|x + 1|$,
(v) $f(x) = [x]$,
(vi) $f(x) = x^2, x \geq 0, = -x^2, x < 0$。

10. 試判斷下述各函數在$x = 0$ 是否可微, 若可微則求出導數, 並討論此時f' 在$x = 0$ 是否連續, 是否可微。

(i) $f(x) = x|x|$, (ii) $f(x) = x^2|x|$,
(iii) $f(x) = x^3|x|$, (iv) $f(x) = x^{2/3}$,
(v) $f(x) = |x|^{3/2}$, (vi) $f(x) = x|x|^{3/2}$。

11. 令$f(x) = x + \sin x$, 求出滿足$f'(x) = 0$ 之所有的x。

12. 設

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq c, \\ ax + b\,, & \quad x > c, \end{cases}$$

其中a, b, c 爲常數。求出使$f'(c)$ 存在之條件(以c 來表示a, b)。

13. 分別對如下的f_1, f_2, 重做上題。

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/|x| \quad , & |x| > c, \\ a + bx^2 \, , & |x| \le c; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sin x \quad , & x \le c, \\ ax + b \, , & x < c \text{。} \end{cases}$$

14. 令$f(x) = (1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x}), x > 0$, 求$Df, D^2f, D^3f$。

15. 設$f'(a)$ 存在, 試判斷下述何者爲正確, 並給出適當理由。
   (i) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$,
   (ii) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$,
   (iii) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$,
   (iv) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$。

16. 對一函數f, 定義

$$D^*f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h},$$

其中$f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$。給二函數f, g,
   (i) 求$D^*(f+g), D^*(f-g), D^*(fg), D^*(f/g)$;
   (ii) 以f及Df 來表示D^*f;
   (iii) 那種函數f 滿足$D^*f = Df$?

17. 求函數f, 使得$f'(x) = |x|, x \in R$。

18. 令

$$f_1(x) = \begin{cases} q^{-1} \, , & x = p/q, (p,q) = 1, \\ 0 \quad\, , & x = 0 \text{ 或無理數;} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} q^{-2} \, , & x = p/q, (p,q) = 1, \\ \quad\;\, , & x = 0 \text{ 或無理數。} \end{cases}$$

試分別討論f_1, f_2 在$x = 0$ 之可微性。

19. 試證(7.15) 成立。

20. 試證(7.16) 對$\alpha < 0$ 成立。

21. 設f 爲一可微函數 。對一$a \in R$, 令

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > a, \\ f(a) + f'(a)(x-a) & , \quad x \le a \text{ 。} \end{cases}$$

試證g 仍爲一可微函數 。

22. 設函數f 滿足$\lim_{t\to\infty} f(t) = c$, 其中$c$ 爲一常數, 即f 以$y = c$ 爲一漸近線 。試問$\lim_{t\to\infty} f'(t)$ 是否必爲0? 證明或否證之 。