第二章

積分與微分的簡介

2.6 不定積分

設函數f 在區間$[a,x]$ 可積, $\forall x\in[a,b]$ 。首先我們知道, 函數f 在區間$[a,b]$之積分, 與a 及b 有關, 亦即$\int_a^b f(u)du$ 爲一a,b 之函數 。爲了更進一步了解前述積分與積分區間之關係, 我們考慮f 在$[a,x]$ 之積分, 其中$x\in[a,b]$, 且令函數A 爲,

$$A(x)=\int_a^x f(u)du,\ x\in[a,b] 。\tag{6.1}$$

函數A 稱爲f 之一不定積分(indefinite integral) 。不定積分爲一函數, 而定積分爲一數值, 二者意義不同 。另外, 我們之所以說爲"一"不定積分, 此因A 與a 有關, 不同的a 便定義出不同的A 。若換一不同的區間下界, 譬如說c, 且令

$$A_1(x)=\int_c^x f(u)du,$$

則

$$A(x)-A_1(x)=\int_a^x f(u)du-\int_c^x f(u)du=\int_a^c f(u)du,$$

故$A(x)-A_1(x)$ 與x 無關。換句話説, 一函數之任二不定積分的差爲一常數(此常數與a 及c 有關)。

由一函數之一不定積分, 可算出其任一積分。例如, 由例4.1 知, 對每一整數$n \geq 1$,

$$\int_0^x u^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\text{。}$$

因此

$$\int_a^b u^n du = \int_0^b u^n du - \int_0^a u^n du = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\text{。}$$

一般而言, 若知f 之一不定積分A, 則

$$\int_c^s f(u)du = A(s) - A(c) = A(u)|_c^s\text{。} \tag{6.2}$$

一函數f 及其不定積分有一簡單的幾何關係。不定積分$A(x)$ 表在曲線$y=f(u)$ 與u 軸之間由$u=a$ 至x 間之“面積”。即若f 會取正值及負值, 則$A(x)$ 表在u 軸上方之面積減掉u 軸下方之面積。也就是將u 軸下方之面積視爲負值。見圖6.1 。

數學中, 有許多函數是以某一函數之一不定積分的形式出現, 利用不定積分也可造出不少有用的新函數, 這是微積分裡花不少篇幅討論不定積分的主要原因之一。

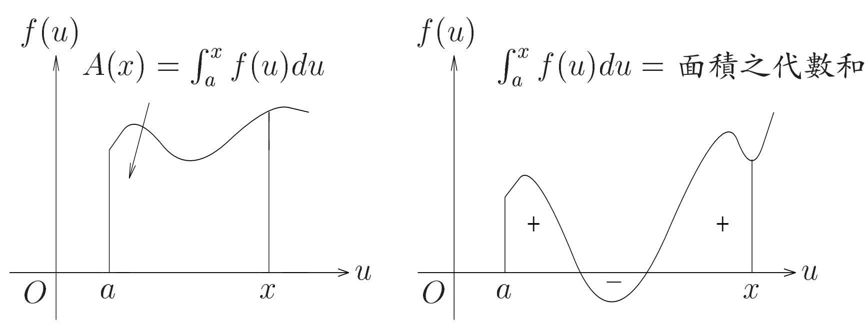


圖6.1. 不定積分與面積之幾何關係

底下我們來看不定積分之一些性質。首先下述定理指出不定積分爲一連續函數。

定理6.1. 設有界函數f 在$[a,b]$ 可積, 且對$\forall x \in [a,b]$, 函數A 之定義如(6.1) 式。則A 在$\forall p \in [a,b]$ 爲連續(在$p=a$ 或$p=b$ 則爲單側連續)。

證明. 對$\forall p \in [a,b]$, 我們想證明$x \to p$ 時, $A(x) \to A(p)$。而因f 爲有界, 故存在一$K > 0$, 使得$|f(u)| \leq K, \forall u \in [a,b]$。因此(利用系理4.1), 若$x > p$, 則

$$\begin{aligned} |A(x) - A(p)| &= |\int_p^x f(u)du| \\ &\leq \int_p^x |f(u)|du \leq \int_p^x K du \\ &= K(x-p) \text{。} \end{aligned}$$

若$x < p$, 則同理可證明$|A(x) - A(p)| \leq K(p-x)$。即有

$$|A(x) - A(p)| \leq K|x-p| \text{。}$$

上式即導致

$$\lim_{x \to p} A(x) = A(p) \text{。}$$

當然在上述討論中, 若$p=a$ 或b, 我們只能得到單側連續。證畢。

例6.1. 在1.5節已證過sine 及cosine 函數皆爲連續。若利用定理6.1 及上一節證出的(5.11)及(5.12), 亦可得sine 及cosine 皆爲連續函數。

有時知道函數f 的某一性質, 亦可導出對應的不定積分之一特殊性質。例如, 若f 在$[a,b]$ 爲非負, 則因

$$A(y) - A(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0, \ \forall a \leq x \leq y \leq b,$$

故A 在$[a,b]$ 間爲一增函數。幾何上的意義即爲, 對一非負函數, 在其圖形下由a 至x的面積, 隨著x 之增大而漸增。

另有一性質就不是那麼容易可由幾何來說明。我們先需要下述定義。

定義6.1. 若對$\forall x, y \in [a,b]$, 且$\alpha \in (0,1)$, 函數g 滿足

$$g(z) \leq \alpha g(y) + (1-\alpha)g(x), \tag{6.3}$$

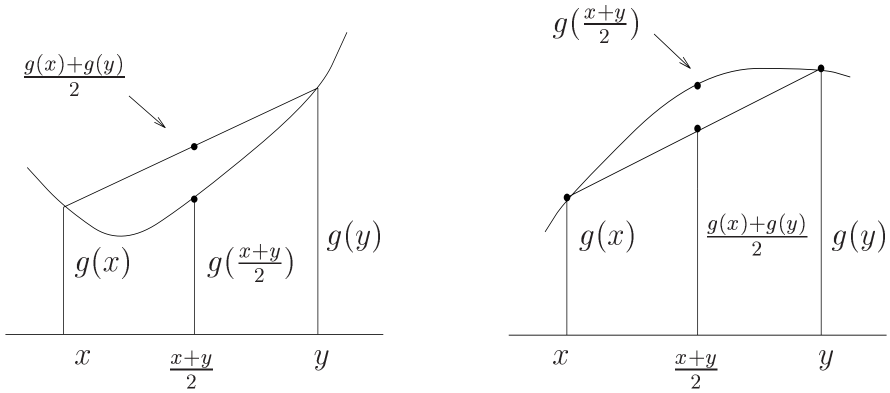
其中$z = \alpha y + (1-\alpha)x$, 則稱$g$ 在$[a,b]$ 爲凸函數(convex function)。而若(6.3) 中之不等號反過來, 則稱g 在$[a,b]$ 爲凹函數(concave function)。

我們略微說明如下。對$x < y$, 若$z = \alpha y + (1-\alpha)x$, 則$z - x = \alpha(y-x)$, 即$z$ 距x 的距離爲區間$[x,y]$ 長度之α 倍。當α 由0 至1, z 即由x 移至y, 而$(z, \alpha g(y) + (1-\alpha g(x))$ 即沿著連接$(x, g(x)), (y, g(y))$ 之線段由左往右移動。不等式(6.3) 就是說g 之圖形在前述線段的下方。至於凹函數則是函數圖形在連接線段之上方。對一凸函數, 連接圖形上任兩點, 則此二點間之圖形在此線段的下方, 凹函數則反過來。圖6.2 爲$\alpha = 1/2$ 的情形。

定理6.2. 設f 爲$[a,b]$ 上之一可積函數。令$A(x) = \int_a^x f(u)du, x \geq a$。

(i) 設f 爲增函數, 則A 爲凸函數;

(ii) 設f 爲減函數, 則A 爲凹函數。



(a)凸函數　　　　(b)凹函數

圖6.2. 以幾何圖形來說明凸函數與凹函數

證明.我們只證(i), 因對一減函數, $-f$ 爲增函數, 利用(i) 於$-f$ 即可得到(ii) 。

設f 在$[a,b]$ 漸增 。對$a \leq x < y \leq b$, 及$0 < \alpha < 1$, 令$z = \alpha y + (1-\alpha)x$ 。我們要證明

$$A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x) \text{ 。} \tag{6.4}$$

又因$A(z) = \alpha A(z) + (1-\alpha)A(z)$, 故若能證出

$$\alpha A(z) + (1-\alpha)A(z) \leq \alpha A(y) + (1-\alpha)A(x),$$

或

$$(1-\alpha)(A(z) - A(x)) \leq \alpha(A(y) - A(z))$$

即可 。而因$A(y) - A(z) = \int_z^y f(u)du, A(z) - A(x) = \int_x^z f(u)du$, 即要證明

$$(1-\alpha)\int_x^z f(u)du \leq \alpha \int_z^y f(u)du \text{ 。} \tag{6.5}$$

因f 爲漸增, 故

$$f(u) \leq f(z), \forall x \leq u \leq z, \quad f(z) \leq f(u), \forall z \leq u \leq y \text{ 。}$$

由此經過積分(利用定理4.6)得

$$\int_x^z f(u)du \le f(z)(z-x), \quad f(z)(y-z) \le \int_z^y f(u)du 。$$

但$z=\alpha y+(1-\alpha)x$ 又可改寫爲$(1-\alpha)(z-x)=\alpha(y-z)$, 故上述二不等式又導致

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\int_x^z f(u)du &\le (1-\alpha)f(z)(z-x)=\alpha f(z)(y-z) \\ &\le \alpha\int_z^y f(u)du 。\end{aligned}$$

因此(6.5) 成立, 而(i) 也就證出了 。

例6.2.由於cosine 函數在$[0,\pi]$ 爲漸減, 故$\sin x=\int_0^x \cos u du$ 在$[0,\pi]$ 間爲凹函數 。而在$[\pi,2\pi]$, cosine 爲漸增, 故在$[\pi,2\pi]$, sine 爲凸函數 。

習 題 2.6

1. 求下述積分
   (i) $\int_{-1}^{2x}(1+t+t^2)dt$, (ii) $\int_x^{x^2}(\frac{1}{2}-\sin t)dt$,
   (iii) $\int_x^{x^2}(u^2+\sin 3u)du$, (iv) $\int_{-\pi}^{x}(1+\cos 2u)^2du$ 。

2. 設f 爲一奇的周期函數, 周期爲2, 又設f 在任一區間皆可積, 令$g(x)=\int_0^x f(u)du$ 。
   (i) 試證對每一整數$n, g(2n)=0$;
   (ii) 試證g 爲偶函數且爲周期2 之周期函數 。

3. 設偶函數f 亦爲一周期爲2 之周期函數 。又設f 在任一區間皆可積, 令$g(x)=\int_0^x f(u)du$ 。
   (i) 試證g 爲奇函數, 且$g(x+2)=g(x)+g(2)$;
   (ii) 以$g(1)$ 來表示$g(2)$ 及$g(5)$;
   (iii) 求$g(1)$ 之值, 使得g 爲周期2 之周期函數 。

4. 設f 及g 在任一區間皆可積, 且f 爲奇函數, g 爲偶函數。又設$f(5)=7, f(0)=0, g(x)=f(x+5), f(x)=\int_0^x g(u)du, \forall x \in R$。試證
   (i) $f(x-5)=-g(x), \forall x \in R$;
   (ii) $\int_0^5 f(u)du=7$;
   (iii) $\int_0^x f(u)du=g(0)-g(x)$。

5. 令$f(x)=[x]$, 試繪$F(x)=\int_0^x f(u)du, x \in [0,5]$, 之圖。可看出雖$f$ 不爲連續, 但F 爲連續, 且逐段線性(piecewise linear)。

6. 設$f(x)=x-[x]-1/2$, 若x 不爲整數, 且$f(x)=0$, 若x 爲一整數, 其中$[\,\cdot\,]$ 爲高斯符號。令$F(x)=\int_0^x f(u)du, u \in R$。
   (i) 試證$f(x+1)=f(x), \forall x \in R$, 且繪$f$在$x \in [0,1]$ 之圖;
   (ii) 試證$F(x)=(x^2-x)/2, \forall x \in [0,1]$, 且$F$ 爲周期爲1 之周期函數;
   (iii) 試以$[\,\cdot\,]$ 來表示$F(x)$。