第二章

積分與微分的簡介

2.5 三角函數的積分

在微積分中, 三角函數的地位很重要, 其原因並不只是它們結合三角形中角與邊的關係, 主要是它們所具有的函數性質 。我們假設大家在中學時代便已熟悉sine (正弦) 、cosine (餘弦) 、tangent (正切) 、cotangent (餘切) 、secant (正割) 及cosecant (餘割) 等六個三角函數, 及它們的反函數arc sine, $\cdots$ 。三角函數的重要性質之一便是周期性(periodicity) 。在諸如物理 、工程及音樂中, 常會處理周期的現象, 如震動 、行星之運轉及波浪之運動 。於探討這類問題時, 其中所牽涉到的數學, 常脫離不了sine 及cosine 函數 。大家在中學時, 對三角函數必有一深刻的印象, 即公式特別多 。其中下述幾個性質在微積分中是較常用到的:

(i) $\cos 0 = \sin(\pi/2) = 1, \sin 0 = \cos(\pi/2) = \sin \pi = 0$;

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$;

(iii) $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, 即cosine 爲偶函數, sine 爲奇函數;

(iv) $\sin(x + \pi/2) = \cos x, \cos(x + \pi/2) = -\sin x, \forall x \in R$;

(v) $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in R$, 即周期皆爲$2\pi$;

(vi) 對$\forall x, y \in R$,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

由此即得倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$

(vii) 對$\forall x, y \in R$,

$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2}),$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2});$$

(viii) 在$[0, \pi/2]$ 間, sine 爲嚴格漸增, cosine 爲嚴格漸減;
(ix) $0 < \cos x < \sin x/x < 1/\cos x, \forall x \in (0, \pi/2)$ 。

另有一些公式及性質將來若需用到我們再列出 。

由性質(iv) 、(v) 及(viii)知, sine 及cosine 函數皆爲逐段單調的函數, 因此由系理3.2, 在任一有限的區間中, sine 及cosine 函數皆爲可積函數 。至於其積分值可藉由定理4.1 得到 。不過我們仍需用到下述不等式 。

定理5.1.對$\forall u \in [0, \pi/2]$ 及$n \geq 1$,

$$\frac{u}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{ku}{n}\right) < \sin u < \frac{u}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{ku}{n}\right) \text{ 。} \tag{5.1}$$

證明.我們先證下述三角級數的等式:

$$2\sin(\frac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{1}{2}x), \quad \forall n \geq 1, x \in R \text{ 。} \tag{5.2}$$

首先利用三角函數的性質(vii) 可得

$$2\sin(\frac{1}{2}x)\cos(kx) = \sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) \text{ 。}$$

將上式對$k = 1, 2, \cdots, n$, 左右各自相加, 即得(5.2) 式 。

若$x/2$ 不爲π之整數倍, 則可將(5.2)式之每一項皆除以$2\sin(x/2)$, 得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+1/2)x) - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} \text{ 。} \tag{5.3}$$

在上式中以$n-1$ 取代n, 且左右各加1, 得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx) = \frac{\sin((n-1/2)x) + \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} \text{ 。} \tag{5.4}$$

上二式只要$x \neq 2m\pi$, 其中m 爲一整數, 皆成立 。

取$x = u/n$, 其中$0 < u \leq \pi/2$, 則由(5.3) 及(5.4) 知, (5.1) 式與下述不等式等價:

$$\begin{aligned} \frac{u}{n}\frac{\sin((n+1/2)u/n) - \sin(u/(2n))}{2\sin(u/(2n))} &< \sin u \\ &< \frac{\sin((n-1/2)u/n) + \sin(u/(2n))}{2\sin(u/(2n))} \text{ 。} \end{aligned} \tag{5.5}$$

而此不等式又等價於下式:

$$\begin{aligned} &\sin((n+1/2)u/n) - \sin(u/(2n)) \\ &< \frac{\sin(u/(2n))}{u/(2n)}\sin u \\ &< \sin((n-1/2)u/n) + \sin(u/(2n)) \text{ 。} \end{aligned} \tag{5.6}$$

而若能證出對$\forall 0 < 2n\theta \leq \pi/2$,

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)\theta) - \sin\theta &< \frac{\sin\theta}{\theta}\sin(2n\theta) \\ &< \sin((2n-1)\theta) + \sin\theta \end{aligned} \tag{5.7}$$

成立, 則令$\theta = u/(2n)$ 便得到(5.6) 式了 。

我們先證(5.7) 中左邊那個不等式。利用三角函數之性質(vi), 得

$$\text{(5.8)} \qquad \begin{aligned} \sin((2n+1)\theta) &= \sin(2n\theta)\cos\theta + \cos(2n\theta)\sin\theta \\ &< \sin(2n\theta)\frac{\sin\theta}{\theta} + \sin\theta, \end{aligned}$$

此處也用到下述三角函數之性質(注意$0 < 2n\theta < \pi/2$)

$$\cos\theta < \sin\theta/\theta, 0 < \cos(2n\theta) \leq 1, \sin\theta > 0 \text{。}$$

立即可看出由(5.8) 便導出(5.7) 中左邊那個不等式。

其次證明(5.7) 中右邊那個不等式。仍利用性質(vi) 得,

$$\sin((2n-1)\theta) = \sin(2n\theta)\cos\theta - \cos(2n\theta)\sin\theta \text{。}$$

上式左右各加$\sin\theta$, 得

$$\text{(5.9)} \qquad \begin{aligned} &\sin((2n-1)\theta) + \sin\theta \\ &= \sin(2n\theta)\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{1-\cos(2n\theta)}{\sin(2n\theta)}\right) \text{。} \end{aligned}$$

由於

$$\frac{1-\cos(2n\theta)}{\sin(2n\theta)} = \frac{2\sin^2(n\theta)}{2\sin(n\theta)\cos(n\theta)} = \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)},$$

(5.9) 式之右側等於

$$\begin{aligned} &\sin(2n\theta)\Big(\cos\theta + \sin\theta\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}\Big) \\ &= \sin(2n\theta)\frac{\cos\theta\cos(n\theta) + \sin\theta\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} \\ &= \sin(2n\theta)\frac{\cos((n-1)\theta)}{\cos(n\theta)} \text{。} \end{aligned}$$

因此, 若能證出

$$\text{(5.10)} \qquad \frac{\cos((n-1)\theta)}{\cos n\theta} > \frac{\sin\theta}{\theta},$$

則(5.7) 右邊那個不等式便得證了。(5.10) 之不等式由下述推導便立即可得:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos((n-1)\theta)\cos\theta - \sin((n-1)\theta)\sin\theta \\ &< \cos((n-1)\theta)\cos\theta < \cos((n-1)\theta)\frac{\theta}{\sin\theta},\end{aligned}$$

其中用到性質(ix) $\cos\theta < \theta/\sin\theta$。本定理證畢。

有了定理5.1, 便可證明下述sine 及cosine 函數之積分公式。

定理5.2.對$\forall u \in R$,

$$\int_0^u \cos x dx = \sin u, \tag{5.11}$$

$$\int_0^u \sin x dx = 1 - \cos u \text{。} \tag{5.12}$$

證明.我們先證(5.11)。設$0 < u \le \pi/2$。因cosine 在$[0, u]$ 中爲漸減, 且有(5.1)之不等式, 故利用定理4.1, 便得到(5.11) 對$\forall u \in (0, \pi/2]$ 成立。若$u = 0$, 則因(5.11) 之左、右皆爲0, 故(5.11) 仍成立。若$u \in [-\pi/2, 0]$, 則$0 \le -u \le \pi/2$。利用cosine 之偶函數性質, 得

$$\int_0^u \cos x dx = -\int_0^{-u} \cos x dx = -\sin(-u) = \sin u \text{。}$$

故(5.11) 對$\forall u \in [-\pi/2,\ \pi/2]$ 成立。若$u \in [\pi/2,\ 3\pi/2]$, 則$u - \pi \in [-\pi/2,\ \pi/2]$。因此

$$\begin{aligned}\int_0^u \cos x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^u \cos x dx \\ &= \sin(\pi/2) + \int_{-\pi/2}^{u-\pi} \cos(x+\pi) dx \\ &= 1 - \int_{-\pi/2}^{u-\pi} \cos x dx = 1 - \sin(u-\pi) + \sin(-\pi/2) \\ &= \sin u \text{。}\end{aligned}$$

故(5.11) 對$u \in [-\pi/2, 3\pi/2]$ 成立。此區間之長度爲2π, 而因(5.11)之左、右均爲周期爲2π 之周期函數, 故得證(5.11) 對$\forall u \in R$ 成立。

其次我們利用(5.11) 來證明(5.12)。

由定理4.4、$\sin(x+\pi/2) = \cos x$ 及cosine 爲偶函數, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x dx &= \int_{-\pi/2}^0 \sin(x+\pi/2) dx \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= \sin(\pi/2) = 1 \text{。}\end{aligned}$$

故(5.12) 對$u = \pi/2$ 成立。而對任一$u \in R$,

$$\begin{aligned}\int_0^u \sin x dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx + \int_{\pi/2}^u \sin x dx \\ &= 1 + \int_0^{u-\pi/2} \sin(u+\pi/2) dx \\ &= 1 + \int_0^{u-\pi/2} \cos x dx \\ &= 1 + \sin(u-\pi/2) = 1 - \cos u \text{。}\end{aligned}$$

即得證(5.12), 證畢。

定理5.2 提供sine 及cosine 函數的積分公式, 其證明雖不難, 卻是很冗長。等我們學了微分及微積分基本定理, 將可很輕易地得到此二公式。那時大家便可體會微積分基本定理的威力了。而我們之所以仍直接推導出此二積分, 是爲了讓大家了解以前所提過的, 積分是可以不管微分而單獨發展的。

利用定理4.3, 可得sine 及cosine 函數在一般區間之積分, 即

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a = \sin x|_a^b, \tag{5.13}$$

$$\int_a^b \sin x dx = -(\cos b - \cos a) = -\cos x|_a^b, \tag{5.14}$$

其中對一函數f,

$$f(x)|_a^b = f(b) - f(a) \text{ 。} \tag{5.15}$$

此符號在積分裡常使用。底下的公式利用定理4.5 便可得到, 我們留在習題。

$$\int_a^b \cos(kx)dx = \frac{1}{k}(\sin(kb) - \sin(ka)), \tag{5.16}$$

$$\int_a^b \sin(kx)dx = -\frac{1}{k}(\cos(kb) - \cos(ka)) \text{ 。} \tag{5.17}$$

例5.1. 求$\int_0^u \sin^2 x dx$ 及$\int_0^u \cos^2 x dx$ 。

解. 首先利用$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^u \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int_0^u (1 - \cos(2x))dx \\
&= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\int_0^u \cos(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin(2u),
\end{aligned}$$

其中最後一積分用到(5.16), 其次利用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^u \cos^2 x dx &= \int_0^u (1 - \sin^2 x)dx \\
&= u - \int_0^u \sin^2 x dx \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) \text{ 。}
\end{aligned}$$

習　題　2.5

1. 試證(5.16) 及(5.17) 。

2. 求下述積分。

(i) $\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x| dx$, (ii) $\int_0^{\pi} |\frac{1}{2} + \cos x| dx$,
(iii) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 3x) dx$, (iv) $\int_0^{\pi/2} (\sin^2 2x - \cos^2 3x) dx$。

3. (i) 試導出 $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$;

(ii) 利用(i), 求 $\int_0^x \sin^3 t dt$ 及 $\int_0^x \cos^3 t dt$。

4. 試證對一可積的周期函數 f, 且周期設為 p,

$$\int_0^p f(x)dx = \int_a^{a+p} f(x)dx, \forall a \in R \text{。}$$

5. (i)對任一不為0之整數 n, 試證

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0;$$

(ii)對任二整數 $m, n, m^2 \neq n^2$, 試證

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi, n \neq 0 \text{。}$$

6. 設 x 不為 2π 的整數倍。試證

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \text{。}$$