第二章

積分與微分的簡介

2.4 積分的基本性質及理論

本節我們介紹一些積分的基本性質及基本理論。首先定理3.2指出閉區間上的有界且單調的函數必為可積, 而其證明過程即提供一求其積分值的方法。我們寫成一定理如下。

定理4.1. 設f 為閉區間$[a,b]$ 上之一有界函數, 令$x_i = a + i(b-a)/n, i = 0, 1, \cdots, n$, 其中$n \geq 1$ 為一整數。

(i) 若f 為漸增, 且對$\forall n \geq 1, B$ 滿足下述不等式

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq B \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{4.1}$$

則$B = \int_a^b f(x)dx$。

(ii) 若f 為漸減, 且對$\forall n \geq 1, B$ 滿足下述不等式

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq B \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \tag{4.2}$$

則$B = \int_a^b f(x)dx$。

證明.我們只證明(i), (ii) 的證明類似 。

由定理3.2 知, 對$\forall n \geq 1$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \leq \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ 。}$$

上式連同(4.1) 式便得

$$\left| B - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)), \forall n \geq 1 \text{ 。}$$

故$B = \int_a^b f(x)dx$ 。

除了定理3.5, 積分尚有一些基本的性質, 即使定理3.5 也可表示成較一般的型式(見定理4.3) 。這些定理只要利用上一節的積分定義, 藉助下和及上和便可得到, 因此我們略去證明 。除了定理4.6 之外, 其餘將來利用微積分基本定理, 立即可得到 。讀者也可試由直觀來看它們爲何成立 。

定理4.2.(線性)**.** 設二函數f 及g 在閉區間$[a,b]$ 可積, 則對任意實數c_1 、c_2, $c_1 f + c_2 g$ 亦可積, 且

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx \text{ 。} \tag{4.3}$$

上定理可很容易地推廣到n 個函數的情況, 我們略去不寫 。

定理4.3.(加性)**.** 下述任二積分存在都會導致第三個積分存在, 且

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \text{ 。} \tag{4.4}$$

定理4.4.(平移之不變性)**.** 設f 在閉區間$[a,b]$ 可積, 則對任一實數c,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \text{ 。} \tag{4.5}$$

定理4.5.(尺度之改變). 設f 在閉區間$[a,b]$ 可積, 則對$\forall k\neq 0$,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(\frac{x}{k})dx \text{ 。} \tag{4.6}$$

定理4.6.(比較定理). 設f 、g 皆在閉區間$[a,b]$ 可積, 且$g(x)\leq f(x),\forall x\in[a,b]$, 則

$$\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx \text{ 。} \tag{4.7}$$

系理4.1.設f 、g 皆在閉區間$[a,b]$ 可積, 且$|g(x)|\leq f(x),\forall x\in[a,b]$, 則

$$\left|\int_a^b g(x)dx\right|\leq\int_a^b |g(x)|\,dx\leq\int_a^b f(x)dx \text{ 。}$$

定理4.6 之一立即的推論爲, 若f 在$[a,b]$ 可積且$f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$, 則$\int_a^b f(x)dx\geq 0$ 。又系理4.1 其實用到若g 在$[a,b]$ 可積, 則$|g|$ 亦在$[a,b]$ 可積, 此結果之證明留在習題 。

雖然我們將來會討論各種積分技巧, 而不需每次都由定義出發來求積分, 但能求出來的積分其實是極少數, 大多數的積分是“算不出”的(以後會説明什麼叫算不出), 而只能求近似值 。一函數在某一區間可積, 只是説其積分值存在, 並不表示此積分值可明確地表示出來 。以下和及上和或以其他簡單函數的積分來逼近, 是常用的方式, 定理4.6 便是此時的理論依據, 可用來得到所欲求積分之一上界及下界 。

其次我們來討論連續函數之可積性 。因一閉區間上之連續函數f 必爲有界, 因此由上一節的推導知(見定義3.1), f 在$[a,b]$ 中有下積分及上積分 。底下我們將證明, 當f 爲連續時, 其下積分與上積分相等, 因此f 在$[a,b]$ 可積 。

首先對$[a,b]$ 之一分割$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 令

$$||P||=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\},$$

$||P||$ 稱爲分割P 之範數(norm), 表分割後所得子區間的長度Δx_1 $,\cdots,\Delta x_n$ 中之最大者 。故$||P||\geq\Delta x_i,\forall i=1,\cdots,n$, 且存在一$i$ 使

得$\|P\| = \Delta x_i$ 。

定理4.7. 設f 為閉區間$[a,b]$ 上之一連續函數, 則f 在$[a,b]$ 可積 。

證明. 由定理3.3 知, 若能證出對$\forall \varepsilon > 0$, 存在$[a,b]$ 之一分割P, 使得$0 \leq T(P) - S(P) < \varepsilon$, 本定理便得證了 。

因閉區間上的連續函數必為均勻連續(見第一章定理6.8), 故$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall x, c \in [a,b] \text{ 且 } |x-c| < \delta \text{ 。} \tag{4.8}$$

現設$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 為$[a,b]$ 之一分割, 且滿足$||P|| < \delta$ 。又令$f(u_i)$ 及$f(v_i)$ 分別表f 在$[x_{i-1}, x_i]$ 之極小(即glb) 及極大值(即lub) 。則

$$T(P) - S(P) = \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))\Delta x_i \text{ 。} \tag{4.9}$$

因$u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 故$|u_i - v_i| \leq \Delta x_i \leq ||P|| < \delta$ 。因此由(4.8) 式知

$$0 \leq f(v_i) - f(u_i) < \frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall i = 1, \cdots, n \text{ 。} \tag{4.10}$$

將此代入(4.9), 即得(注意$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$)

$$0 \leq T(P) - S(P) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon \text{ 。}$$

得證 。

設一有界函數f 在閉區間$[a,b]$ 可積, 而g 為另一有界函數, 且$g(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$ 。即除了可能在端點外, 二函數之值皆相同, 則不難看出二函數在$[a,b]$ 之上積分相同, 下積分也相同 。因此g 在$[a,b]$ 亦可積, 且積分值即為$\int_a^b f(x)dx$ 。更一般地則有下述結果 。

定理4.8. 設一有界函數f 在閉區間$[a,b]$ 可積, 且除了在有限個點外,

另一有界函數g 滿足$g(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$, 則$g$ 在$[a,b]$ 亦可積, 且$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ 。

將定理4.7 與4.8 結合即得下述推論 。

系理4.2.設f 爲閉區$[a,b]$ 上之一有界函數, 且只在有限個點不連續, 則f 在$[a,b]$可積 。

如前, 只在有限個點不連續的函數, 稱爲逐段連續的函數 。若將系理4.2 中之“有限個” 改爲“可數個”, 其結果仍成立, 我們就先接受此事實好了, 證明略去 。不過通常有系理4.2 已經足夠了 。第一章例5.8 即爲一只在可數個點不連續的函數 。

在上一節我們曾得到閉區間上之有界且逐段單調的函數必爲可積, 現在又得逐段連續之有界函數亦可積 。若欲積分的函數爲閉區間上的連續函數, 有界的條件自然成立 。但若函數並非在整個區間$[a,b]$ 上連續, 則有界的假設就有必要了 。例如, $f(x) = 1/x, x \in (0,1]$, f 在$x = 0$ 不連續, 因此定理4.7 及系理4.1 皆不適用 。以後我們會擴展可積函數的概念, 那時對閉區間的要求可放寬, 因而有些函數, 如$g(x) = 1/\sqrt{x}, x \in (0,1]$, 雖仍在$x = 0$ 不連續, 但卻是可積 。不過前述$f(x) = 1/x$ 仍在$(0,1]$ 不可積 。

之前我們考慮下和及上和, 將閉區間$[a,b]$ 分割後, 分別在每一子區間取f 之glb m_i 及lub M_i, 而得到和$S(P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ 及$T(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ 。因此若f 在$[a,b]$ 可積, 則

$$S(P) \le \int_a^b f(x)dx \le T(P) \text{ 。} \tag{4.11}$$

底下我們考慮比較一般的和 。

設函數f 在$[a,b]$ 可積, 且$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲$[a,b]$ 之一分割 。在每一子區間$[x_{i-1}, x_i]$ 中任取一數$z_i, i = 1, \cdots, n$, 則

$$R(P) = \sum_{i=1}^n f(z_i)\Delta x_i$$

稱爲f 在$[a,b]$ 之一Riemann 和(Riemann sum) 。Riemann 爲十九世紀德國一著名的數學家, 他在二十四歲時(西元1850 年), 發表一篇關於分析的基礎之論文, 首先以和的極限給出積分之嚴密定義 。

任一下和或上和皆爲一Riemann 和, 且因$m_i \leq f(z_i) \leq M_i, \forall i = 1, \cdots, n$, 故必有

$$S(P) \leq R(P) \leq T(P) \text{ 。} \tag{4.12}$$

因f 在$[a,b]$ 可積, 因此$\forall \varepsilon > 0$, 存在一分割P, 使得$0 \leq T(P) - S(P) < \varepsilon$ 。而又有(4.11) 及(4.12), 故$\forall \varepsilon > 0$, 存在一分割P, 使得

$$\left| R(P) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ 。}$$

即只要適當地選取分割P, 可使Riemann 和與積分值極接近 。

我們便將以Riemann 和來逼近$\int_a^b f(x)dx$, 敘述成如下之定理 。

定理4.9.設有界函數f 在閉區間$[a,b]$ 可積, $\{P_n, n \leq 1\}$ 爲一數列之$[a,b]$ 的分割, 且滿足

$$\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0 \text{ 。} \tag{4.13}$$

又設$R(P_n)$ 爲任一對應P_n 之Riemann 和, 則

$$\lim_{n\to\infty} R(P_n) = \int_a^b f(x)dx \text{ 。} \tag{4.14}$$

證明.若能證出$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得

$$0 \leq T(P_n) - S(P_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \tag{4.15}$$

則因如前所述$S(P_n) \leq R(P_n) \leq T(P_n)$, 且$S(P_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq T(P_n)$, 故有

$$\left| R(P_n) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \text{ 。}$$

再依極限的定義便得證(4.14) 成立 。

因假設f 在$[a,b]$ 可積, 由定理3.3 知, $\forall\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$ 之一分割$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$, 使得

$$0\leq T(P)-S(P)<\frac{\varepsilon}{2}\ 。\tag{4.16}$$

又必可選取P 使得$k\geq 2$ (若$k\leq 1$, 則利用系理3.1, 取P 之一$k\geq 2$ 的子分割即可) 。

因f 爲一有界函數, 故存在一$K>0$, 使得

$$-K\leq f(x)\leq K,\forall x\in[a,b]\ 。$$

對每一分割P_n, 其$k-1$ 個或更少的子區間可包含分割P 中的點x_1,$\cdots$,x_{k-1}, 且P_n 之剩餘的每一子區間皆包含於P 的某一子區間中(讀者可試繪一圖看看), 又P_n 的子區間數, 以$\#P_n$ 表之, 並不須大於或等於k 。

對分割P_n,

$$T(P_n)-S(P_n)=\sum_{i=1}^{\#P_n}(M_i-m_i)\Delta u_i,\tag{4.17}$$

其中M_i,m_i 分別爲f 在P_n 之第i 個子區間$[u_{i-1},u_i]$ 中的lub 及glb 。因$|m_i|$, $|M_i|\leq K$, 且$\Delta u_i\leq ||P_n||$, 故(4.17) 右側每一項皆小於或等於$2K||P_n||$ 。因此(4.17) 右側那些項中, 對應包含$x_1,\cdots,x_{k-1}$ 的子區間的和, 不超過$2K(k-1)||P_n||$ 。另外, 對一包含於P 的子區間$[x_{j-1},x_j]$ 的P_n 之子區間$[u_{i-1},u_i]$,

$$(M_i-m_i)\Delta u_i\leq(M'_j-m'_j)\Delta x_j\,,$$

其中M'_i,m'_i 分別爲f 在$[x_{j-1},x_j]$ 中的lub 及glb (此因$m'_j\leq m_i,M'_j\geq M_i$ 且$\Delta u_i\leq\Delta x_i$) 。因此(4.17) 右側那些項中對應不包含$x_1,\cdots,x_{k-1}$ 的子區間的和, 不超過$T(P)-S(P)$ 。

由上討論知,

$$0\leq T(P_n)-S(P_n)\leq(T(P)-S(P))+2K(k-1)||P_n||\ 。\tag{4.18}$$

又由(4.13) 之假設知, $\forall\varepsilon > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得

$$||P_n|| < \frac{\varepsilon}{4K(k-1)}, \forall n \geq n_0 \text{ 。} \tag{4.19}$$

結合(4.16) 、(4.18) 及(4.19) 得

$$0 \leq T(P_n) - S(P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq n_0 \text{ 。}$$

即(4.15) 成立 。本定理得證 。

由上定理立即得, 若P_n 爲$[a, b]$ 之一n 等分正規分割, 則(因$||P_n|| = (b-a)/n \to 0$, 當$n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \text{ 。}$$

上式之左側爲一Riemann 和之極限, $\Delta x = (b-a)/n$, z_i 爲$[x_{i-1}, x_i]$ 中任一點 。底下爲一應用 。

例4.1.設p 爲一正整數, 且$b > 0$, 求$\int_0^b x^p dx$ 。
證明.因$f(x) = x^p$ 在$[0, b]$ 上連續, 故亦可積 。因此若取$\Delta x = b/n, z_i = ib/n, i = 1, \cdots, n$, 則利用定理4.9 得

$$\begin{aligned} \int_0^b x^p dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x\,, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^p \\ &= \frac{b^{p+1}}{p+1}, \end{aligned}$$

其中極限值用到習題第1 題 。由此又得(利用定理4.3) 對每一正整數p 及$\forall b > a \geq 0$,

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \text{ 。} \tag{4.20}$$

例4.2. 設$f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ 爲一n 次多項式 。則利用上例及定理4.2得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k dx=\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k dx=\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} 。$$

例4.3. 將$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n}(n+i)^{-1}$ 表示成一積分 。

解. 因

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i/n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x\,,$$

其中$f(x)=(1+x)^{-1}, [a,b]=[0,1], \Delta x=1/n, z_i=i/n$ 。又$1/n\to 0$, 故由定理4.9 得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i}=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx 。$$

要注意的是, $(1+x)^{-1}$ 在$[0,1]$ 上爲單調且有界, 故$\int_0^1 (1+x)^{-1}dx$ 的確存在 。

微積分裡有很多不同版本的均值定理(Mean-Value Theorem), 底下兩個是關於積分的 。

定理4.10.(積分之均值定理). 設f 在$[a,b]$ 上連續, 則存在一$c\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a) 。\tag{4.21}$$

證明. 首先$a=b$時由(4.21)之左右皆爲0, 本定理自然成立 。現設$b>a$ 。令M 及m 分別表f 在$[a,b]$ 之極大值及極小值, 則$m\le f(x)\le M, \forall x\in[a,b]$ 。故利用定理4.6 即得

$$m(b-a)=\int_a^b m dx\le \int_a^b f(x)dx\le \int_a^b M dx=M(b-a)\,,$$

即

$$m \le \int_a^b f(x)dx/(b-a) \le M \text{ 。}$$

再利用連續函數之中間值定理(第一章定理6.3) 得, 存在一$c \in [a,b]$, 使得

$$f(c) = \int_a^b f(x)dx/(b-a)\,,$$

而此即(4.21) 式 。

在上定理中, f 爲連續的假設是必要的, 見下例 。

例4.4.設

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & 1/2 < x \le 1 \text{ 。} \end{cases}$$

則$\int_0^1 f(x)dx = 1/2 \ne f(c)(1-0), \forall c \in [0,1]$ 。

設$f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$, 定理4.10 指出, 在$f$ 圖形下, 由a 至b 的面積, 可以一高爲$f(c)$, 底仍爲區間$[a,b]$ 之長方形的面積來取代 。若$f(x)$ 不一定爲正, 也仍有類似的解釋, 只要在$f(x) \le 0$ 處將面積視爲負值 。

由(4.21) 即得, 對一連續函數f,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,, \tag{4.22}$$

其中M 及m 分別表f 在$[a,b]$ 之極大值及極小值 。此式亦爲一對f 在$[a,b]$ 上之積分的估計, 它給出該積分之一簡單的上界及下界 。至於定理4.10 爲何稱爲均值定理呢? 可如下地解釋 。

若有有限個值$f_1, f_2, \cdots, f_n$, 則其平均爲

$$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} \text{ 。}$$

而若給一函數f, 想對無限多個不同的$f(x)$ 取平均, 其中x 爲$[a,b]$ 中任一數, 一個自然的想法爲自$[a,b]$ 中任取n 個數, 設爲$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 然後求

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

再令$n\to\infty$ 。此平均的極限若存在也與我們如何取$\{x_i\}$ 有關 。但若取$\{x_i\}$ 爲$[a,b]$ 之等分點, 則

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

其中$\Delta x_i=(b-a)/n$, 則$n\to\infty$ 時, 此平均趨近至

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx} 。$$

$\int_a^b f(x)dx/(b-a)$ 便稱爲f 在$[a,b]$ 之平均值(mean value) 。(4.22) 式指出對一連續函數f, 此平均值介於m 與M 之間 。而(4.21) 式則是說在區間$[a,b]$ 中, 必有一c 存在, 使得$f(c)$ 等於該平均值 。不過定理4.10 只是保證c 之存在, 並未指出c 爲何值 。

另外, 亦有一關於加權平均的結果, 此爲上定理之推廣 。

定理4.11. 設f 及g 均爲$[a,b]$ 上之連續函數, 且設g 在$[a,b]$ 上全爲非正或全爲非負 。則存在一$c\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx \text{ 。} \tag{4.23}$$

證明. 設g 在$[a,b]$ 皆非負 。仿上定理之證明, 由不等式$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ 出發, 可得

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx \text{ 。} \tag{4.24}$$

若$\int_a^b g(x)dx=0$, 則(4.24) 式導致$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$, 此時任一$c\in[a,b]$, 皆可使(4.23) 式成立 。若$\int_a^b g(x)dx\ne 0$, 則必爲正(因設$g(x)$

$\geq 0, \forall x \in [a,b]$) 。將(4.24) 式每一項皆除以$\int_a^b g(x)dx$, 然後再度利用連續函數的中間值定理即得證 。

上述加權均值定理(Weighted Mean-Value Theorem), 常可用來做爲二函數乘積之積分的估計, 特別若其中有一函數的積分較易求時, 便可用上 。在習題中可看到一些應用的例子 。至於爲什麼稱爲加權平均? 不失一般性可設在$[a,b]$ 中$g \geq 0$ 且$g \not\equiv 0$ (因假設g 全爲非正或全爲非負, 而若$g \equiv 0$, (4.23) 當然成立) 。則

$$\frac{g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}$$

爲n 個量$f_1, \cdots, f_n$ 之加權平均, 其中g_i 表f_i 之權重 。再仿定理4.9 之後的說明, 則得函數f 之加權平均爲(其中g 稱爲權重函數(weight function))

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} 。$$

定理4.11指出, 上述加權平均會等於f 在$[a,b]$ 中的某一值$f(c)$ 。

最後我們來看積分之唯一性 。

大家應仍記得我們所給的積分的定義, 是源自於爲了對平面上一些常見的圖形, 給出一適當的面積的定義 。我們可能會想知道, 除了定義3.2, 是否可以其他方式來定義積分? 當然仍要具備那些我們認爲該有的性質 。

爲了更明確地討論, 我們試著來決定如何給面積一個滿意的定義 。首先, 面積可視爲一集合函數(set function), 即對某一特定的集合R, 我們想給一實數$A(R)$, 並稱之爲A 之面積 。因函數A 之定義域爲一集合之集合, 故稱之爲集合函數 。其次, 對那些集合, 我們才給其“面積” 呢? 若f 爲一在$[a,b]$ 之有界 、非負且可積之函數, 則由2.3 節之討論知, 在函數f 的圖形下, 由a 至b 的區域R, 必須有一“面積” 。這類的區域R, 稱爲一縱集(ordinate set), 並且我們要求對任一集合函數, 若要稱之爲“面積”, 其定義域須包含所有這類縱集 。我們選取縱集之底部爲一半開區間(half-open interval), 如此兩相鄰的集合, 如$[a,b)$ 及$[b,c)$ 之交集爲空集合 。

定義3.2 所定之積分亦爲一集合函數, 其定義域爲所有的縱集。此因對一非負之可積函數f, 若R 爲在f 的圖形下, 由a 至b 的區域, 則我們給R 之函數值爲$\int_a^b f(x)dx$。

另外, 底下的一些性質我們認爲也是面積函數A 應該有的。A 之定義域以D 表之。

(i) $A(R) \geq 0, \forall R \in D$。

(ii) $A(R_1) \leq A(R_2), \forall R_1, R_2 \in D$ 且$R_1 \subset R_2$。

(iii) 設$R_1, \cdots, R_n \in D$, 且$R_i \cap R_j = \phi$, $\forall i \neq j$, i, $j = 1, \cdots, n$ ($R_1, \cdots, R_n$ 稱爲互斥(mutually disjoint))。則

$$A(R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n) = A(R_1) + A(R_2) + \cdots + A(R_n) \text{。}$$

(iv) 設f 爲一取值k 之常數函數, 且R 爲在f 的圖形下由a 至b 的區域, 則$A(R) = k(b-a)$。

我們想要證明的是, 對任一集合函數A, 若其定義域包含所有縱集, 並滿足上述四個性質, 則其函數值與定義3.2 所定出之積分相同。換言之, 積分爲唯一滿足我們所需之集合函數。此結果可陳述於下。

定理4.12.設A 爲一集合函數, 其定義域包含所有縱集, 並滿足前述條件(i)-(iv)。又設f 爲一在區間$[a, b]$ 之有界、非負且可積之函數, R 爲在f 的圖形下由a 至b 的區域。則

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx \text{。} \tag{4.25}$$

證明.對每一$[a, b]$ 之分割P, 我們將證明

$$S(P) \leq A(R) \leq T(P) \text{。} \tag{4.26}$$

而因f 爲可積, 滿足(4.26) 之唯一值即爲$\int_a^b f(x)dx$, 如此(4.25) 便得證了。

設$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲$[a, b]$ 之一分割, 且

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

爲相對應的下和。對$\forall i = 1, 2, \cdots, n$, 令$L_i$ 表底部爲區間$[x_{i-1}, x_i]$, 高度爲m_i 之矩形。由性質(iv), $A(L_i) = m_i \Delta x_i$。又因$R_1, R_2, \cdots,$ R_n 爲互斥, 故由性質(iii)

$$A(L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = A(L_1) + A(L_2) + \cdots + A(L_n) = S(P)\text{。}$$

又$L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ 爲R 之一子集, 故由性質(ii)

$$S(P) = A(L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) \le A(R)\text{。}$$

同理可證$A(R) \le T(P)$, 因此(4.26) 成立。

習　題　2.4

1. 設p 爲一正整數, 利用

$$b^p - a^p = (b-a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + \cdots + ba^{p-2} + a^{p-1}),$$

試證對每一正整數i,

$$i^p < \frac{(i+1)^{p+1} - i^{p+1}}{p+1} < (i+1)^p\text{。}$$

利用上式得

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{i=1}^{n} i^p \text{ ,} \forall n \ge 2\text{。}$$

由此再得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}\text{。}$$

2. 分別將下述二極限表示成積分。

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+4n^2} \right)$。

3. (i) 試證
$$\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}=\sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^{m-1}}{m}, \forall n\geq 1 \text{ 。}$$
(ii) 利用(i) 將
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
表示成一積分。

4. 試證

(i) $\frac{1}{2}\leq\int_1^2\frac{1}{t}dt\leq 1$;

(ii) $1-\frac{1}{x}\leq\int_1^x\frac{1}{t}dt\leq x-1, \forall x>1$;

(iii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq\int_1^n\frac{1}{t}dt\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$, 其中$n\geq 2$爲一正整數。

5. 利用定理4.11, 試證下述不等式。
$$\frac{1}{10\sqrt{2}}\leq\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx\leq\frac{1}{10} \text{ 。}$$

6. 利用$\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)/\sqrt{1-x^2}$ 及定理4.11, 試證下述不等式。
$$\frac{11}{24}\leq\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx\leq\frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}} \text{ 。}$$

7. 利用$1+x^6=(1+x^2)(1-x^2+x^4)$ 及定理4.11, 試證對$\forall a>0$,
$$\frac{1}{1+a^6}\left(a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right)\leq\int_0^a\frac{1}{1+x^2}dx\leq a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5} \text{ 。}$$

8. 設f 在$[a,b]$ 連續, 其中$a<b$, 且$\int_a^b f(x)dx=0$。試證存在一$c\in[a,b]$, 使得$f(c)=0$。

9. 設f爲一非負函數, 且在$[a,b]$ 可積。試證若$\int_a^b f(x)dx = 0$, 則在每一f 之連續點, f 之值爲0。(提示: 設c 爲f 之一連續點且$f(c) > 0$, 則存在c 之一鄰域$A \subset [a,b]$, 使得$f(x) > f(c)/2, \forall x \in A$)

10. 設f 在$[a,b]$ 連續, 且對每一$[a,b]$ 上之連續函數g, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$。試證$f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$。

11. 設f 在$[a,b]$ 可積。

    (i) 試證$|f|$ 在$[a,b]$ 亦可積;

    (ii) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$。

12. 求下述各積分。

    (i) $\int_{-1}^1 |2x+1|dx$;

    (ii) $\int_{-2}^3 [4x-1]dx$, 其中$[\,\cdot\,]$ 爲最大整數函數;

    (iii) $\int_0^2 |x(x-1)(x-2)|dx$;

    (iv) $\int_{-2}^{-4} (x+4)^{10}dx$。(提示: 利用定理4.4)

13. 試證三角形面積等於底乘以高之半。

14. 試證半徑爲r 的圓面積爲$2\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}dx$。

15. 試證下述關於積分的Cauchy 不等式(Cauchy's inequality for integrals)。對任二連續函數f 及g,

$$\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \geq \Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 。$$

16. (i)利用積分$\int_0^{1000} x^{10}dx$ 求$1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}$ 之一近似值;

    (ii) 利用積分$\int_2^{1000} x^{-10}dx$ 求$2^{-10}+3^{-10}+\cdots+1000^{-10}$ 之一近似值。

17. 設函數f 在$[0,b]$ 可積, 其中$b>0$ 。

(i) 若f 爲偶函數, 試證$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_0^b f(x)dx$;

(ii) 若f 爲奇函數, 試證$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$ 。

18. 設$f(x)=x-[x]$ 。試證f 在$[0, 5]$ 可積, 並求其積分值 。

19. 設

$$f(x)=\begin{cases} \sin x/x\ , & x\neq 0, \\ 1 \quad\quad\ , & x=0 \text{ 。} \end{cases}$$

試證f 在$[0, 1]$可積 。

20. 設

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x)\ , & x\neq 0, \\ 0 \quad\quad\quad\quad , & x=0 \text{ 。} \end{cases}$$

試證f 在$[0, 1]$ 可積 。

21. 設f 定義在[0,1]上, 且

$$f(x)=\begin{cases} 1/q\ , & x=p/q,\ \text{且 } (p,q)=1, \\ 0 \quad\ , & x=0 \text{ 或無理數 。} \end{cases}$$

試證f 在$[0, 1]$可積 。

22. 設$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 爲實數且滿足

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0 \text{ 。}$$

利用積分之均值定理, 試證方程式$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一實根 。