第二章

積分與微分的簡介

2.3 積分的定義

在上一節我們先以直觀的方式, 接受一曲線下所圍出的面積, 然後以一極限值表示面積, 底下我們將此步驟反過來 。我們不再以直觀的方式, 來表示一連續曲線下所圍出的面積 。而將以純粹解析的方式, 先證明一數列矩形面積和的極限存在, 此極限值即為積分同時也是面積的定義 。

為了使求一如前的邊界為曲線的區域之面積, 較易於處理, 我們先假設曲線的部分, 為一連續函數的圖形 。設f 為一定義在閉區間$[a,b]$ 上的連續且非負的函數 。在座標平面上, 由f 之圖形, 二直線$x=a$ 及$x=b$, 及x 軸所圍出之區域以R 表之, 即為在f 的圖形下由a 至b 的區域 。對於R 我們想給一數A, 稱為其面積(area) 。面積A 必須有與多邊形的面積一致的性質, 即A 須大於或等於每一包含於R 之多邊形的面積, 而小於或等於每一包含R 之多邊形的面積 。我們將證明恰有一數A 滿足此性質 。在對面積進一步討論前, 我們先介紹一區間之分割(partition)的概念 。設有$n+1$ 個點

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

將$[a,b]$ 分成n 個子區間

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n] \text{ 。}$$

我們便以符號

$$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$$

表上述n 個子區間, 並稱此爲$[a,b]$ 之一分割 。不過對一分割P, 有時是指分割點$x_0,x_1,\cdots,x_n$, 有時是指分割後的n 個子區間, 二者本質並無差異, 因前者可決定後者, 而後者亦可決定前者 。若一分割之每一子區間皆等長, 便稱此爲一正規分割(regular partition) 。

例如, 設$[a,b]=[1,6]$, 則$P=\{1,2,2.5,\pi,\sqrt{15},6\}$, 表將$[1,6]$ 分割成

$$[1,2],[2,2.5],[2,5,\pi],[\pi,\sqrt{15}],[\sqrt{15},6]$$

等5個子區間 。而$P=\{1,2,3,4,5,6\}$ 則爲$[1,6]$ 之一正規分割, 且分成

$$[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[5,6]$$

等5個等長子區間 。

可看出$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲一正規分割, 若且唯若

$$x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=\frac{b-a}{n},$$

亦即若且唯若

$$x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}, i=0,1,\cdots,n \text{ 。}$$

現對區域R, 欲求其面積 。令$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲$[a,b]$ 之任一分割, 因f 爲連續, 對每一子區間$[x_{i-1},x_i], i=1,\cdots,n$, 可在其中找到一$u_i$, 使得$f(u_i)$ 爲f 在$[x_{i-1},x_i]$ 之極小值(見第一章定理6.6) 。如此我們便造出n 個長方形, 其底分別爲$[x_{i-1},x_i]$, 高爲$f(u_i), i=1,\cdots,n$ 。這些長方形即形成一多邊形(稱爲長方多邊形, rectangular polygon), 並內接於R 。若以$I(P)$ 表此內接於R 之長方多邊形的面積, 則

$$I(P)=\sum_{i=1}^{n}f(u_i)(x_i-x_{i-1}) \text{ 。}$$

同理, 在每一子區間$[x_{i-1}, x_i]$, 找到一v_i 使得$f(v_i)$ 爲f 在$[x_{i-1}, x_i]$ 之極大値 。然後分別以$[x_{i-1}, x_i]$ 爲底, $f(v_i)$ 爲高, 造出n 個長方形 。這些長方形亦形成一長方多邊形, 且外接於R, 其面積爲

$$C(P) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ 。}$$

由於每一內接於R 之長方多邊形, 必包含於每一外接於R 之長方多邊形, 故對任二$[a, b]$ 之分割P_1, P_2,

$$I(P_1) \leq C(P_2) \text{ 。}$$

因此若令L, U 分別表下述二集合:

$$L = \{I(P) | P \text{爲 } [a, b] \text{ 之一分割}\},$$
$$U = \{C(P) | P \text{爲 } [a, b] \text{ 之一分割}\},$$

則L 中每一數皆爲U 之一下界, 且U 中每一數皆爲L 之一上界 。由實數系統之最小上界公理, 集合L 有最小上界, 集合U有最大下界 。若令

$$A_l = \operatorname{lub} L, \quad A_u = \operatorname{glb} U,$$

則由前面的說明知,

$$A_l \leq A_u \text{ 。}$$

若$A_l = A_u$, 則明顯地, R 的面積A 便可取爲$A = A_l = A_u$ 。如此一來, 對一連續且非負的函數f, 在其圖形下由a 至b 的區域, 其面積A 便可依上述步驟來定義了 。當然可看出此步驟之工程極浩大, 要花不少力氣才能求出一面積 。也因如此, 才顯現出微積分基本定理的重要性, 因利用該定理我們便可以間接的方式來求出面積 。關於$A_l = A_u$ 的證明我們留在稍後, 底下先舉一求$I(P)$ 及$C(P)$之例 。

例3.1.設$f(x) = 4 - x^2, [a, b] = [-2, 2]$, 區域$R$ 爲在f 之圖形下由a 至b, 又設$P = \{-2, -1/2, 1, 2\}$ 。f 在子區間$[-2, -1/2], [-1/2, 1]$

及[1, 2]之極小值分別爲$f(-2)=0, f(1)=3, f(2)=0$, 故

$$I(P)=0\cdot(-\frac{1}{2}+2)+3\cdot(1+\frac{1}{2})+0\cdot(2-1)=\frac{9}{2}\text{ 。}$$

而f 在三個子區間之極大值分別爲$f(-1/2)=15/4, f(0)=4, f(1)=3$, 故

$$C(P)=\frac{15}{4}(-\frac{1}{2}+2)+4(1+\frac{1}{2})+3(2-1)=\frac{117}{8}\text{ 。}$$

現在我們將f 爲連續的假設, 放寬爲僅要求是有界函數(閉區間上的連續函數當然亦爲有界) 。

設f 爲一定義在閉區間$[a,b]$ 上的有界函數 。對$[a,b]$ 之任一分割$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 令

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),$$
$$T(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

其中m_i, M_i 分別爲f 在子區間$[x_{i-1},x_i]$之glb 及lub 。先前我們考慮f 爲連續函數, 而閉區間上之連續函數必有極小值(且即爲其glb) 及極大值(即爲其lub), 但現在的f 僅爲有界函數, 因此極小或極大值就不一定存在了 。

上述$S(P)$ 及$T(P)$ 分別稱爲f 關於分割P 在$[a,b]$ 之下和(lower sum) 及上和(upper sum) 。又因對$\forall i=1,\cdots,n$, 及$x\in[x_{i-1},x_i], m_i \le f(x)\le M_i$, 故

$$S(P)\le T(P)\text{ 。}$$

爲了方便, 我們以希臘字母Δ (即δ 之大寫)來表示差距, Δx_i 即爲$x_i-x_{i-1}, i=1,\cdots,n$ 。因此$S(P)$ 及$T(P)$ 可改寫爲

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\ T(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i\text{ 。}$$

對$[a,b]$之一分割P, 若分出來之某些子區間再分成數個, 則得到$[a,b]$之一新的分割P', P'稱爲P之一細分(refinement)。例如, 若$P=\{1,2,3,4\}$, 則$P'=\{1,1.5,2,2.7,3,3.2,4\}$爲$P$之一細分。可看出$P'$爲$P$之一細分, 若且唯若$P$所包含的那些分割點之集合, 爲$P'$所包含的那些分割點之集合的子集。

底下爲一關於細分之簡單的結果, 直觀上而言是對的。此結果指出細分會使下和增加, 使上和減小。

引理3.1.設P'爲P之一細分, 則$S(P)\le S(P')$, 且$T(P')\le T(P)$。

證明.我們只須考慮分割P'比P多一子區間的情況即可(爲什麼?)。設$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 又爲了簡便, 設$P'=\{x_0,x,x_1,\cdots,x_n\}$, 其中$x_0<x<x_1$。則

$$S(P')=m(x-x_0)+m'(x_1-x_0)+\sum_{i=2}^{n}m_i\Delta x_i,$$

其中m及m'分別爲f在$[x_0,x]$及$[x,x_1]$之glb。因m_1爲f在$[x_0,x]\cup[x,x_1]$之glb, 故$m_1\le m$且$m_1\le m'$。因此

$$m_1\Delta x_1=m_1((x-x_0)+(x_1-x))\le m(x-x_0)+m'(x_1-x)\text{。}$$

故得

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=m_1\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n}m_i\Delta x_i\le S(P')\text{。}$$

同理可證$T(P')\le T(P)$。證畢。

設有$[a,b]$之二分割P_1及P_2, 則此二分割之分割點之聯集P爲P_1及P_2之共同細分。例如, $P_1=\{1,2,5\}, P_2=\{1,3,4,5\}$, 則$P=\{1,2,3,4,5\}$爲$P_1$之細分亦爲$P_2$之細分。利用此結果, 可證明下述定理。

定理3.1.設f爲閉區間$[a,b]$上之一有界函數, P_1,P_2爲$[a,b]$之任二分割。則$S(P_1)\le T(P_2)$。

證明. 設P 爲P_1 及P_2 之一共同細分。則由引理3.1, $S(P_1) \le S(P)$ 且$T(P) \le T(P_2)$。而$S(P) \le T(P)$, 故得

$$S(P_1) \le S(P) \le T(P) \le T(P_2) \text{。}$$

得證。

利用引理3.1 及定理3.1 又立即可得下述推論。

定理3.2. 設P' 爲P 之一細分, 則$T(P') - S(P') \le T(P) - S(P)$。

對$[a,b]$ 上之一有界函數f, 仍令

$$L = \{S(P) | P \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之一分割}\}, \tag{3.1}$$

$$U = \{T(P) | P \text{ 爲 } [a,b] \text{ 之一分割}\} \text{。} \tag{3.2}$$

則由定理3.1 知, L 中每一數皆爲U 之一下界, 而U 中每一數皆爲L 之一上界。故由最小上界公理得$\mathrm{lub}\, L$ 及$\mathrm{glb}\, U$ 皆存在。因此可有下述定義。

定義3.1. 設f 爲在$[a,b]$ 上之一有界函數, L, U 之定義如(3.1)及(3.2)。則f 由a 至b 之下積分(lower integral), 以$\underline{\int}_a^b f$ 表之, 且爲

$$\underline{\int}_a^b f = \mathrm{lub}\, L \text{。}$$

而f 由a 至b 之上積分(upper integral), 以$\overline{\int}_a^b f$ 表之, 且爲

$$\overline{\int}_a^b f = \mathrm{glb}\, U \text{。}$$

由lub 之定義知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在$[a,b]$ 之一分割P_1, 使得

$$0 \le \underline{\int}_a^b f - S(P_1) < \varepsilon,$$

而根據glb 之定義知, 存在$[a,b]$ 之一分割P_2, 使得

$$0 \leq T(P_2) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon \text{ 。}$$

故若取P 爲P_1 及P_2 之一共同細分, 則利用引理3.1, 得

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f - S(P) < \varepsilon, \tag{3.3}$$

且

$$0 \leq T(P) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon \text{ 。} \tag{3.4}$$

也就是$\forall \varepsilon > 0$, 存在$[a,b]$ 之一分割P, 使得(3.3) 及(3.4) 同時成立 。

由於每一上和$T(P)$ 爲L 之一上界, 且$\underline{\int_a^b} f = \operatorname{lub} L$, 故對每一分割$P$, $\underline{\int_a^b} f \leq T(P)$ 。因此$\underline{\int_s^b} f$ 爲U 之一下界 。又因$\overline{\int_a^b} f = \operatorname{glb} U$, 故對每一分割$P$,

$$S(P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq T(P) \text{ 。} \tag{3.5}$$

若f 除了有界, 亦在$[a,b]$ 單調, 底下説明可經由適當地選取分割P, 使得$S(P)$ 與$T(P)$ 可任意接近 。

對每一正整數n, 令$P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲$[a,b]$ 之一正規分割, 即$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = (b-a)/n$ 。先設f 在$[a,b]$ 爲漸增 。則在區間$[x_{i-1}, x_i]$, f 之glb 爲$f(x_{i-1})$, lub 爲$f(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$ 。因此

$$S(P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i = \left(\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\right)\frac{b-a}{n},$$

$$T(P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\right)\frac{b-a}{n} \text{ 。}$$

由上二式得

$$\begin{aligned} T(P_n) - S(P_n) &= (f(x_n) - f(x_0))\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.6}$$

可看出對$\forall\varepsilon>0$, 只要n 取得夠大, 則可使

$$0\le T(P_n)-S(P_n)<\varepsilon \text{ 。} \tag{3.7}$$

至於若f 爲漸減, 仿上述討論仍可得到(3.7) 。即得證對任一$[a,b]$ 上之單調且有界之函數f, 存在一分割P, 使得$S(P)$ 可任意接近$T(P)$ 。又(3.5) 式導致若f 爲有界函數, 則對每一$[a,b]$ 上的分割P,

$$0\le \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\le T(P)-S(P) \text{ 。} \tag{3.8}$$

故若再加上f 爲單調函數, 則由於$\forall\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$ 上之一分割P, 使得$T(P)-S(P)<\varepsilon$, 因此利用(3.8) 即得

$$0\le \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0 \text{ 。}$$

由此立即得到$\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f=0$ 。我們將結果陳述於下 。

定理3.3.設f 爲閉區間$[a,b]$ 上之一有界且單調之函數, 則

$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f \text{ 。} \tag{3.9}$$

例3.2.設$f(x)=c$ 爲一常數, $\forall x\in[a,b]$ 。易見對每一分割P_n, $S(P_n)=T(P_n)=c(b-a)$ 。故

$$\underline{\int_a^b} c=\overline{\int_a^b} c=c(b-a) \text{ 。}$$

例3.3.設$f(x)=4-x, x\in[1,3]$, 求f 在$[1,3]$ 之下積分及上積分 。

解.取P_n 爲$[1,3]$ 之一正規分割, 即$P_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 其中$\Delta x_i=2/n$, 且

$$x_i=1+\frac{2i}{n},\ i=0,1,\cdots,n \text{ 。}$$

又f 在$[x_{i-1}, x_i]$ 之glb 爲$f(x_i) = 4 - x_i = 3 - 2i/n$ 。因此

$$\begin{aligned} S(P_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(3 - \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{6n}{n} - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= 6 - \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 6 - \frac{2(n+1)}{n} = 4 - \frac{2}{n} \text{ 。} \end{aligned}$$

同理可得(或利用(3.6) 式, 而將$f(b)$ 與$f(a)$ 交換, 因此處f 爲漸減)

$$T(P_n) = 4 + \frac{2}{n} \text{ 。}$$

而由(3.5) 式知, 對$\forall n \geq 1$,

$$4 - \frac{2}{n} = S(P_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq T(P_n) = 4 + \frac{2}{n} \text{ 。}$$

故$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = 4$ 。

例3.4.最大整數函數$f(x) = [x]$ 在區間[2,5] 爲有界且漸增, 求下積分及上積分 。

證明.設P_{3n} 爲$[2, 5]$ 之一$3n$ 等分正規分割, 故每一等分之長度爲$1/n$ 。且因f 在前n 個子區間之glb 皆爲2, 其次爲3, 再其次爲4, 故

$$S(P_{3n}) = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} 3 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2n+1}^{3n} 4 \cdot \frac{1}{n} = 2 + 3 + 4 = 9 \text{ 。}$$

(3.6)式又給出

$$T(P_{3n}) - S(P_{3n}) = \frac{(5-2)(f(5) - f(2))}{3n} = \frac{3}{n},$$

故$T(P_{3n}) = 9 + 3/n$ 。因此$9 \leq \underline{\int_2^5} f \leq \overline{\int_2^5} f \leq 9 + 3/n$ 。故得

$$\underline{\int_2^5} f = \overline{\int_2^5} f = 9 \text{ 。}$$

有許多我們常遇到的初等函數皆滿足(3.9)式, 由此即引申出下述定義。

定義3.2. 設函數f 在閉區間$[a,b]$ 上有界, 則f 稱爲在$[a,b]$ 可積(integrable), 若且唯若$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ 。若f 在$[a,b]$ 可積, 則f 由a 至b 之積分, 以$\int_a^b f(x)dx$ 表之, 且定義爲

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \text{。} \tag{3.10}$$

函數f 稱爲積分算子(integrand) 。

由例3.2 知, 對一常數c,

$$\int_a^b c dx = c(b-a) \text{。} \tag{3.11}$$

有時我們說$\int_a^b f(x)dx$ 存在, 其涵意即爲f 在$[a,b]$ 可積。由定理3.2 便知, 閉區間上的有界且單調之函數爲可積。另外,我們略說明積分的符號如下。符號$\int$ 爲萊布尼茲於西元1675 年所創, 爲把英文字母S 拉長而得, 代表和(sum) 的第一個字母。因此$\int_a^b f(x)dx$ 代表一些形如$f(x)dx$ 的項之和, 正如下和及上和分別爲一些$m_i\Delta x_i$ 及$M_i\Delta x_i$ 之和。若$f(x) \geq 0$, 則$f(x)dx$ 可想成是一高度爲$f(x)$, 且底部爲dx 之長方形之面積。在符號$\int_a^b f(x)dx$ 中, 眞正需要用來表示f 自a 至b 的積分, 其實只有$\int_a^b f$ 的部分。不過, 我們陸續會發現萊布尼茲的積分符號, 在許多運算中, 是一很好的計算上的設計, 因此我們通常仍採用以$\int_a^b f(x)dx$ 來表示積分。但在$\int_a^b f(x)dx$ 中,並不是非用x 不可, 採用其他字母皆可。因此,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots \text{。}$$

在此符號x, t, u等, 稱爲虛擬變數(dummy variable), 就如同$\sum_{i=1}^n a_i$ 中的i 一樣。

另外, 前述$\int_a^b f(x)dx$ 皆只對$a<b$ 才有定義 。爲了方便, 我們令

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

且若$b<a$, 令

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ 。}$$

(3.8) 式對任一有界函數皆成立, 由此即得下述定理 。

定理3.4.有界函數f 在閉區間$[a,b]$ 可積, 若且唯若$\forall\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$ 之一分割P, 使得

$$0 \le T(P) - S(P) < \varepsilon \text{ 。}$$

底下的定理直觀上也是對的 。

定理3.5.設函數f 在閉區間$[a,b]$ 上可積, 則f 在每一$[a,b]$ 之閉的子區間亦可積 。

證明.設$[c,d]\subset[a,b]$ 。對$\forall\varepsilon>0$, 因f 可積, 由定理3.3 知, 存在一分割P, 使得$0\le T(P)-S(P)<\varepsilon$ 。令P' 爲一包含c,d 二點之P 的細分 。因$S(P')\ge S(P)$ 且$T(P')\le T(P)$, 故

$$0 \le T(P') - S(P') \le T(P) - S(P) < \varepsilon \text{ 。}$$

取P_1 爲P' 之一子集且爲$[c,d]$ 之一分割, 則

$$0 \le T(P_1) - S(P_1) \le T(P') - S(P') < \varepsilon \text{ 。}$$

故由定理3.3 即得證f 在$[c,d]$ 可積 。

如同面積, 積分有下述加性 。

定理3.6.設f 在閉區間$[a,b]$ 及$[b,c]$ 皆可積, 則f 在$[a,c]$ 可積, 且

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \text{ 。}$$

證明. 由定理3.3, $\forall\varepsilon>0$, 分別存在$[a,b]$ 及$[b,c]$ 之分割P_1,P_2, 使得

$$0\le T(P_1)-S(P_1)<\frac{\varepsilon}{2},\quad 0\le T(P_2)-S(P_2)<\frac{\varepsilon}{2}\text{ 。}$$

由此又得

$$0\le (T(P_1)+T(P_2))-(S(P_1)+S(P_2))<\varepsilon\text{ 。}\tag{3.12}$$

因$S(P_1)+S(P_2)$ 及$T(P_1)+T(P_2)$ 分別爲f 在$[a,c]$ 之一下和及上和, 故再度利用定理3.3 即得證f 在$[a,c]$ 可積 。

其次由(3.5) 式(此時$\underline{\int}_a^b f=\overline{\int}_a^b f=\int_a^b f(x)dx$)

$$\begin{aligned}S(P_1)&\le\int_a^b f(x)dx\le T(P_1),\\ S(P_2)&\le\int_b^c f(x)dx\le T(P_2),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}S(P_1)+S(P_2)&\le\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx\\ &\le T(P_1)+(P_2)\text{ 。}\end{aligned}\tag{3.13}$$

因f 在$[a,c]$ 可積, 故$\int_a^c f(x)dx$ 亦介於其下和$S(P_1)+S(P_2)$ 及上和$T(P_1)+T(P_2)$ 之間 。故由(3.11) 及(3.12) 即得

$$\left|\int_a^c f(x)dx-\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx\right|<\varepsilon,\forall\varepsilon>0\text{ 。}$$

但此即

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx\text{ 。}$$

本定理證畢 。

若$\int_a^b f(x)dx$ 及$\int_b^c f(x)dx$ 皆存在, 則不難證明, 不論a 與b 及b 與c 之大小, $\int_a^c f(x)dx$ 亦存在, 且

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx\text{ 。}$$

又由定理3.2 及3.5 即得下述推論。

系理3.1. 設函數f 在$[a,b]$ 爲有界且逐段單調(piecewise monotonic), 則f 在$[a,b]$可積。

任一多項式在一區間上, 皆爲有界且逐段單調(以後會說明), sine 函數及cosine 函數亦是。事實上, 我們常遇到的函數中, 大多是逐段單調的, 所以我們已得到不少函數爲可積。

本節所討論的函數之可積, 先決條件(見定義3.2)爲此函數爲有界, 且須定義在一(有限的)閉區間上。由我們的推導過程如分割、取極大、極小值等, 可看出是需要有一些條件, 才能保證下和及上和皆有限, 且趨近至同一值。若區間不爲有限, 或函數不爲有界, 則至少有一$f(x_i)\Delta x_i = \infty$ (或$-\infty$), 此時必有一下和或上和爲∞ 或$(-\infty)$。有界及閉區間就保證了下和及上和皆有限。

另外, 我們也得到在閉區間上的一有界且逐段單調的函數必可積。閉區間上的一連續函數亦可積的證明則留在稍後。當然區間非閉, 或函數非逐段單調或非連續也有可能會可積, 我們陸續會說明(這是所謂Theory of Integration 的範圍)。至於知道一函數是可積之後, 又如何計算其積分值呢(這是所謂Technique of Integration 的範圍)? 等我們逐步介紹更多的基本性質及方法之後, 將可使我們能求出不少的積分。

習 題 2.3

1. 令$f(x) = 1/x, [a,b] = [1/2, 2]$, P 爲一正規分割, 將$[a,b]$ 分成6個等長子區間。求$I(P)$ 及$C(P)$。

2. 對下述函數及分割, 分別求其$S(P)$ 及$T(P)$。

   (i) $f(x) = 1 - x^2, [a,b] = [0,2], P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$;

   (ii) $f(x) = 2x^2, [a,b] = [-1,1], P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$;

(iii) $f(x)=x^3, [a,b]=[-2,0]$,
$P=\{-2,-\frac{5}{3},-\frac{4}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\}$;

(iv) $f(x)=1/x, [a,b]=[-4,-1], P=\{-4,-3,-2,-1\}$;

(v) $f(x)=1/x^2, [a,b]=[1,4], P=\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4\}$。

3. 設$f(x)=x, P$ 爲$[a,b]$ 之一分割。試證

(i) $S(P)<(b^2-a^2)/2<T(P)$;

(ii) $\underline{\int}_a^b f=\overline{\int}_a^b f=(b^2-a^2)/2$。

4. 設$f(x)=x^3$, 試證對任一$[a,b]$ 之分割P,

(i) $S(P)<(b^4-a^4)/4<T(P)$;

(ii) $\underline{\int}_a^b f=\overline{\int}_a^b f=(b^4-a^4)/4$。

5. 設$f(x)=1/x^2, P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲$[a,b]$ 之一分割, $b>a>0$。

(i)寫出$S(P)$ 及$T(P)$;

(ii)試證

$$\frac{1}{x_{i+1}^2}<\frac{1}{x_ix_{i+1}}<\frac{1}{x_i^2},\ \ \forall i=0,1,\cdots,n-1,$$

因此

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}^2}<\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}<\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i^2},$$

由此再得

$$S(P)<\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<T(P);$$

(iii) 試證$\underline{\int}_a^b f=\overline{\int}_a^b f=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$。

6. 設$f(x)=x^3, a<b$。試證

$$\underline{\int}_a^b f=\overline{\int}_a^b f=\frac{(b^4-a^4)}{4}\text{。}$$

7. 設$f(x)=1/x^3$。試證對每一$[a,b]$之分割P,

(i) $S(P)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)<T(P)$;

(ii) $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$。

8. 設函數f之定義爲

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 爲有理數}, \\ 1, & \text{若 } x \text{ 爲無理數}。\end{cases}$$

求$\underline{\int_0^1} f$及$\overline{\int_0^1} f$, 並指出f在[0,1]是否可積。

9. 設函數f之定義爲

$$f(x)=\begin{cases} x\,, & \text{若 } x \text{ 爲有理數}, \\ 0\,, & \text{若 } x \text{ 爲無理數}。\end{cases}$$

求$\underline{\int_0^1} f$及$\overline{\int_0^1} f$, 並指出f在[0,1]是否可積。

10. 設二函數f及g在$[a,b]$皆爲連續, 且$f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$。試證

$$\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g, \text{ 且 } \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g \text{。}$$

11. 若$|f|$在[0, 1]可積, 試問f在[0, 1]是否亦必可積, 若是則證明, 不是則舉一反例。