第一章

極限

1.6 連續性之進一步探討

至此希望各位對極限及連續已有一些初步的了解。我們知道在阿基米德時代,就能經由極限的過程,算出不少圖形的面積、曲線長及立體的體積。牛頓時代對極限雖沒有嚴密的概念, 但也發展出不少理論。而經過一百年以上的嘗試錯誤(trial and error), 才能以一優雅的方式, 只用幾句話描述出極限的定義。而微分及積分也都要以極限的過程來定義。

大家自中學起開始學習數學的證明,尤其是幾何學的問題,給定假設又知道要求證的事之後, 按部就班, 有時還要用諸如歸謬法、窮舉法等,最後宣稱得證。經過六年的中學訓練, 我們終於對數學上的邏輯推演有較清晰的了解。平面幾何學在現代數學中的份量雖並不大,但它對提供邏輯方面的訓練,功能一直是很大。因此在微積分中開始接受極限,對這經過長時間及多人智慧的結晶,才發展出如此簡潔的$\varepsilon-\delta$的極限定義,要能在短時間內完全接受,甚至運用自如,自非易事。

有不少極限值是一眼就可看出的,這方面的直觀當然不要失去。但是當遇到較細膩的情況, 只好祭出$\varepsilon-\delta$的法寶。極限的觀念若能弄清,不但往後的學習較容易,也使自己數學的能力提升至另

一層次。

至於連續,如上節所述我們早有此概念,如連續的變數$x \in [0,1]$,有別於$x = 1, 2, 3, \cdots$。由於微積分裡所處理的函數,常是連續函數,或是逐段連續函數(piecewise continuous function), 如$f(x) = [x]$,所以對連續函數不得不另眼相看。附帶一提,極限及連續雖都是逐點的(pointwise)性質,也就是一點一點看函數是否極限存在,是否連續。但在討論某函數在某點的極限或連續性時,便須給該函數在那一點附近的值。例如, 若只給$f(0) = 0$,則無法得知$\lim_{x\to 0} f(x)$爲何?

在結束本章前我們再給幾個連續函數的重要結果。首先,前面提過我們常會遇到合成函數, 下述定理指出連續性經過合成的運算仍會保持。

定理6.1.設$f = u \circ v$表二函數u, v之合成函數。若v在a連續, u在$q = v(a)$連續,則f在a連續。

證明.因u在q連續, 故$\forall \varepsilon_1 > 0$, 存在一$\delta_1 > 0$, 使得

$$|u(y) - u(q)| < \varepsilon_1\,,\ \forall |y - q| < \delta_1 \text{。} \tag{6.1}$$

又v在a連續,且$q = v(a)$, 故對$\varepsilon_2 = \delta_1 > 0$, 存在一$\delta_2 > 0$,使得

$$|v(x) - q| < \varepsilon_2\,,\ \forall |x - a| < \delta_2 \text{。} \tag{6.2}$$

若令$y = v(x)$, 則由(6.1)及(6.2)得, 對$\forall |x - a| < \delta_2$, 便有$|u(y) - u(q)| < \varepsilon_1$, 即$|u(v(x)) - u(v(a))| < \varepsilon_1$, 而此即爲$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$。故依定義知$f$在$a$連續。

例6.1.設$f(x) = \sin(3x^2 + 5x + 2)$。則$f = u \circ v$, 其中$u(x) = \sin x, v(x) = 3x^2 + 5x + 2$, 皆爲連續函數,故$f$爲一到處連續之函數。

例6.2.設$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$。則$f = u \circ v$, 其中$u = \sqrt{x}, v = 1 - \sin^2 x$。$v$爲一到處連續之函數,而$u$只在$x \geq 0$連續。因$v \geq 0$恆成

立, 故f爲一到處連續之函數。若改爲考慮$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$,則f_1在$x^2 \leq 1$處連續。

關於連續性有不少特殊的性質, 直觀上都是顯然成立的, 底下我們敘述並證明幾個較基本的性質。第一個要介紹的是Bolzano 定理。Bolzano (1781−1848)爲一出生於捷克之天主教神父, 他算是很早體會到許多關於連續函數的敘述, 雖看起來很明顯, 但若想更廣泛地應用, 便須要證明的學者之一。在十九世紀之前葉他對數學有不少貢獻, 尤其是將現代嚴密的觀念, 引進數學分析中。首先我們給一引理。

引理6.1.連續函數之符號保持性質(sign-preserving property of continuous function). 設f在c連續,且$f(c) \neq 0$。則存在一$\delta > 0$, 使得$f(x)$與$f(c)$之符號相同, $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$。

證明.設$f(c) > 0$。由連續的定義知,$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$,使得

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon\,,\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)\ 。 \tag{6.3}$$

若取$\varepsilon = f(c)/2 > 0$, 則(6.3)式成爲

$$\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)\,,\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)\ 。$$

因此$f(x)$與$f(c)$一樣皆爲正,$\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$。

若$f(c) < 0$, 取$\varepsilon = -f(c)/2$即可,得證。

註.若f在c僅爲右連續(或左連續),則上引理可改爲存在一$\delta > 0$, 使得$f(x)$與$f(c)$同號, $\forall x \in [c, c+\delta)$ (或$x \in (c-\delta, c]$)。

利用此引理及實數系統的最小上界公理(見定理1.1之註), 可證明定理6.2, 及著名的勘根定理。

定理6.2.(Bolzano定理). 設函數f在閉區間$[a,b]$上每一點皆連續, 且$f(a)$與$f(b)$ 符號相反。則存在一$c \in (a,b)$, 使得$f(c) = 0$。

證明.設$f(a)<0$且$f(b)>0$。在(a,b)中說不定有許多x可使$f(x)=0$, 我們只要能找出一個便得證了。而我們想找的是最大的那一個。令$S=\{x|a\leq x\leq b$且$f(x)\leq 0\}$。S並非空集合, 此因$f(a)<0$, 故$a\in S$。而$\forall x\in S$, $x<b$, 因此b爲S之一上界,故由最小上界公理知$c=\sup S$存在。我們想證明c即爲所求, 即$f(c)=0$。

$f(c)$只有三種可能:$f(c)>0, f(c)<0$ 及$f(c)=0$。若$f(c)>0$, 則由引理6.1知, 存在區間$(c-\delta,c+\delta)$(若$c=b$則爲$(c-\delta,c]$), 使得f 在此區間中皆爲正。故在S中的元素皆不可能屬於$(c-\delta,c+\delta)$中, 即S中的元素皆小於或等於$c-\delta$, 因此$c-\delta$亦爲S之一上界。而$c-\delta<c$, 此與c爲S之最小上界不合。故$f(c)>0$不可能。

其次, 若$f(c)<0$, 則存在區間$(c-\delta,c+\delta)$(若$c=a$則爲$[c,c+\delta)$), 使得f在此區間爲負。故會有一$x>c$, 使得$f(x)<0$, 因此這個$x\in S$, 而這又與c爲S之最小上界不合。故$f(c)<0$亦不可能。

剩下唯一可能只有$f(c)=0$了。又$a<c<b$, 此因已知$f(a)<0, f(b)>0$。

至於若$f(a)>0$且$f(b)<0$, 同理可證。

Bolzano定理即是說, 其圖形從x軸的一端要到另一端, 必定會橫過x軸。直觀上看是對的, 函數若不連續, 當然可以跳過x軸, 連續的移動則不行(稍後的定理6.3 也是基於這種原理)。這是Bolzano在西元1817 年發表的結果,我們以下圖來說明。各位在中學裡所學過的找方程式的根, 有所謂勘根定理, 事實上即爲Bolzano定理。

圖6.1.

由Bolzano定理,立即可得底下的連續函數的中間值定理(Interm-ediate-Value Theorem)。

定理6.3.設f 在$[a,b]$ 連續, 且設存在$x_1,x_2\in[a,b], x_1<x_2$, 使得$f(x_1)\neq f(x_2)$。則對每一介於$f(x_1)$ 與$f(x_2)$ 間之y, 存在一$c\in(x_1,x_2)$, 使得$f(c)=y$。

證明. 不失一般性設 $f(x_1) < f(x_2)$。則對任一 $y \in (f(x_1), f(x_2))$, 令 g 爲一定義在 $[x_1, x_2]$ 之函數, 且

$$g(x) = f(x) - y \text{ 。}$$

則 g 在 $[x_1, x_2]$ 連續, 且 $g(x_1) = f(x_1) - y < 0, g(x_2) = f(x_2) - y > 0$。故利用Bolzano定理,存在一 $c \in (x_1, x_2)$, 使得 $g(c) = 0$, 但此即 $f(c) = y$, 得證。

在上二定理中,我們皆要求 f 在區間的端點須連續,若 f 在端點不連續,則結果便不一定對了。例如, 取 $[a, b] = [0, 1]$, 且 $f(x) = 1, \forall x \in (0, 1], f(0) = -1$。則可看出上二定理的結果皆不成立。

利用中間值定理可證明一我們在實數中熟知的結果。

系理6.1. 設 n 爲一正整數,則對每一 $a > 0$, 方程式 $x^n = a$ 恰有一正根。

證明. 取一 $c > 1$ 滿足 $0 < a < c$, 且令

$$f(x) = x^n\,,\ x \in [0, c] \text{ 。}$$

則 f 在 $[0, c]$ 連續, $f(0) = 0, f(c) = c^n$。因 $0 < a < c < c^n$, 即 a 介於 $f(0)$ 與 $f(c)$ 之間。故由定理6.3知, 存在一 $b \in (0, c)$, 使得 $f(b) = a$。這便證明了存在性。又因 f 在 $[0, c]$ 間爲一嚴格漸增函數,不可能有另一 x, 使得 $f(x) = x^n = a$ 。證畢。

數學中有所謂固定點定理(Fixed-Point Theorem),底下的定理爲其一特別的情況。證明並不難, 只要利用Bolzano定理即可, 我們留在習題。

定理6.4. 設 f 爲一定義在 $[a, b]$ 上之連續函數, $a < b$, 且設 $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$。則存在一 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = c$。

在微積分中, 求極值(extreme value)爲一重要的課題, 連續函數

在這方面也有一些結果值得討論。

設f爲一定義在實數上一集合S之實值函數。若存在一$c \in S$, 使得

$$f(x) \leq f(c)\,,\ \forall x \in S\,,$$

則稱f在S上有絕對極大(alsolute maximum)。$f(c)$則稱爲f在S上之絕對極大值。若存在一$d \in S$, 使得

$$f(x) \geq f(d)\,,\ \forall x \in S\,,$$

則稱f在S上有絕對極小(absolute minimum)。

若f在c有絕對極大,則f在S中之圖形,最高點發生在$x = c$, 且高度爲$f(c)$。同理可說明絕對極小。例如, 設$f(x) = \sin x, S = [0, \pi]$。則$f$在$x = \pi/2$有絕對極大, 在$x = 0$及$\pi$有絕對極小。又若$f(x) = 1/x, S = (0, 1]$。則$f$在$S$之絕對極小發生在$x = 1$, 但$f$在$S$上無絕對極大。當然可看出$f$在$x = 0$不連續。

我們想要證明的是, 若f在一閉區間中連續, 則f在此區間, 必既有絕對極大且有絕對極小。這就是相當重要的連續函數的極值定理(Extreme-Value Theorem for Continuous Function)。不過我們先需要下述定理。

定理6.5.(連續函數之有界定理, Boundedness Theorem for Continuous Function). 設f在閉區間$[a, b]$上連續, 則f在$[a, b]$上有界。

證明.我們想利用連續二分法(sucessive bisection)以反證法來證明。

假設f在$[a, b]$不爲有界。令c爲$[a, b]$之中點。則f必在$[a, c]$中或$[c, b]$中不爲有界(有可能在二子區間皆不有界)。設$[a_1, b_1]$爲使f不有界的那一個子區間(若有兩個則選左邊那一個)。重複此步驟,每次若在二子區間f皆不有界,則選左邊那一個,且以$[a_{n+1}, b_{n+1}]$ 表自$[a_n, b_n]$所選的會使f不有界的那一個子區間。顯然$[a_n, b_n]$之長度爲$(b - a)/2^n$。

令$A = \{a, a_1, a_2, \cdots\}$, 由於$A \subset [a, b]$爲一有界集合,故$A$之上確界存在。令$\alpha = \sup A$, 則$\alpha \in [a, b]$。由於$f$在$\alpha$連續,故存在一$\delta > 0$,

使得(即取$\varepsilon = 1$)對$\forall x \in S = (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$,

$$|f(x) - f(\alpha)| < 1 \text{。} \tag{6.4}$$

但若$\alpha = a$, 則區間S 要改爲$[a, a+\delta)$; 若$\alpha = b$, 則S要改爲$(b-\delta, b]$ 。

(6.4)式又導致

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|\,,\ \forall x \in S \text{ 。} \tag{6.5}$$

故f在S中以$1+|f(\alpha)|$爲其一上界 。由於$[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n], \forall m \geq n$, 故易見$\alpha \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ 。故若n夠大, 使得$[a_n, b_n]$的長度$(b-a)/2^n < \delta$, 則$[a_n, b_n] \subset (\alpha-\delta, \alpha+\delta) = S$ 。故由(6.5)知, f在$[a_n, b_n]$中有界 。此與之前假設f在$[a_n, b_n]$不爲有界矛盾 。此矛盾導至f在$[a, b]$上有界 。證畢 。

若函數f在$[a, b]$有界,則集合$\{f(x)|a \leq x \leq b\}$有上界且有下界,因此該集合有上確界及下確界,分別以$\sup f$及$\inf f$表之 。即

$$\sup f = \sup\{f(x)|a \leq x \leq b\}\,,\ \inf f = \inf\{f(x)|a \leq x \leq b\} \text{ 。}$$

對一有界函數f,便有$\inf f \leq f(x) \leq \sup f, \forall x \in [a, b]$ 。底下的定理指出$[a, b]$上之一連續函數f, 必在$[a, b]$中會取值$\inf f$及$\sup f$ 。

定理6.6.(連續函數之極值定理). 設f在$[a, b]$上連續, $a < b$ 。則存在$c, d \in [a, b]$, 使得

$$f(c) = \sup f \text{ 且 } f(d) = \inf f \text{ 。}$$

證明.我們只要證明存在$c \in [a, b]$, 使得$f(c) = \sup f$即可 。然後利用$\inf f = \sup(-f)$, 便可得到也存在一$d \in [a, b]$, 使得$f(d) = \inf f$ 。

令$M = \sup f$ 。設不存在一$c \in [a, b]$, 使得$f(c) = \sup f$, 我們想導出矛盾 。

令$g(x) = M - f(x)$ 。則$g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ 。因此$1/g$亦在$[a, b]$連續(利用系理5.1) 。則由定理6.5, $1/g$在$[a, b]$有界,設$1/g(x) < K$, $\forall x \in [a, b]$, 其中$K > 0$ 。由此又得

$$M - f(x) > 1/K\,,\ \forall x \in [a, b]\,,$$

故

$$f(x) < M - 1/K\,,\ \forall x \in [a,b]\,,$$

而此與M為f在$[a,b]$之最小上界矛盾。即存在一$c \in [a,b]$, 使得$f(c) = M = \sup f$。證畢。

上述定理指出, 若f在$[a,b]$連續, 則$\sup f$及$\inf f$分別為絕對極大及絕對極小。再由中間值定理(即定理6.3)知, f在$[a,b]$上之值域即為$[\inf f, \sup f]$。

其他尚有連續性,在取反函數時仍會保持,我們只敘述如下,證明並不難,只要畫個圖來看便可明瞭。

定理6.7. 設f在閉區間$[a,b]$連續且為嚴格漸增。令$c = f(a), d = f(b)$, 且令g為f之反函數,即對$\forall y \in [c,d], g(y) = x$, 其中$x \in [a,b]$滿足$y = f(x)$。則

(i) g在$[c,d]$嚴格漸增;

(ii) g在$[c,d]$連續。

最後,我們介紹均勻連續性(uniform continuity), 或稱一致連續。

在以$\varepsilon - \delta$來定義連續時, 欲檢定函數f在a連續, 對$\forall \varepsilon > 0$, 我們須找一$\delta > 0$, 使得$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \forall |x-a| < \delta$。對一$\varepsilon > 0$, 我們知道$\delta$的取法並不唯一,一旦找到一個$\delta$, 比該$\delta$小的正數皆適用。而且我們也可一開始就限制$\delta$不超過某值, 因只要找到即可, 而愈小的正數是愈有可能適用。換句話說, f在a連續,是一種局部的性質(local property), 只與f在a附近一鄰域(不論多小) 有關。附帶一提,我們也只需考慮充分小的ε即可,因對此ε, 若可找到δ, 則該δ仍可適用比前述ε還大的ε值。

另外,δ的選取不但與ε有關, 與a也有關。很容易想像,若f在a附近的圖形較平緩, 則δ可大些; 若f在a附近的圖形較陡,則δ就要小些。若在某區間中, δ只與ε有關,而與a無關, 我們就說f為均勻連續(uniformly continuous)。也就是若$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$, 使得對

區間I中的任二x, y, 若滿足$|x-y| < \varepsilon$, 便皆使$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, 則稱$f$ 在I 中均勻連續。因此,我們可以說f在某點連續,但稱f在某點均勻連續卻是沒有意義的,必須是在一區間才會討論f 是否會均勻連續。

若f為一均勻連續函數,令$y = f(x)$, 則二y值可任意接近,只要其對應的x值夠接近, 而與該二x的位置無關。我們舉幾個例子來看。

例6.3.令$f(x)=2x+3, I=R$。則因對$\forall \varepsilon > 0$

$$|f(x)-f(a)| = 2|x-a| < \varepsilon, \text{只要} |x-a| < \delta = \varepsilon/2\,,$$

故f在R上為均勻連續。

例6.4.$f(x)=x^2, I=[0,1]$。則因對$\forall x, a \in I$,

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x+a||x-a| \leq 2|x-a| < \varepsilon\,,$$

只要$|x-a| < \delta < \varepsilon/2$, 故$f$在$I$均勻連續。事實上若將$I$換成任一有限的區間,$f$仍為均勻連續。

不過f在R上卻非均勻連續, 證明如下。設f在R 均勻連續。令$\varepsilon = 1$, 假設可找到一$\delta > 0$滿足均勻連續的條件。現取

$$a = \frac{1}{\delta}, \quad x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2},$$

則$|x-a| = \delta/2 < \delta$, 但

$$|f(x)-f(a)| = |x+a||x-a| > \frac{2}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 1\,,$$

不合。此矛盾導至f在R上不為均勻連續。

上例告訴我們一函數是否均勻連續,有時與所取的區間有關。

例6.5.設$f(x)=1/x, x>0, I=(0,1]$, 則f在I上連續, 但不為均勻連續。證明如下。

取$\varepsilon = 10$, 且設可找到一$0 < \delta < 1$ (爲何可如此限制δ 的範圍?), 滿足均勻連續的條件。現取$x = \delta, a = \delta/11$, 則$|x-a| = 10\delta/11 < \delta$, 但

$$|f(x) - f(a)| = \frac{10}{\delta} > 10 \text{ 。}$$

此與均勻連續的假設不合。

如果繪$f(x) = 1/x, x > 0$, 之圖形, 可看出f在x很接近0時,變化非常快, 必須限制x的變化很小才能保證f的變化不大。但在$x = 1$附近,圖形就很平緩, 即使x離1稍遠些,f的變化並不大。這是f不爲均勻連續的原因。不過我們有下述結果。

定理6.8.設函數f在一閉區間I爲連續,則f在I爲均勻連續。

引用定理6.8 時,除了函數爲連續,區間也要閉的才行。所以,如$f(x) = 1/x, I = (0, 1]$就不行。但對$\forall 0 < a < 1, f$ 在$I = [a, 1]$爲均勻連續。當然有些函數在非閉區間也可能均勻連續,見例6.4。定理6.8之證明需用到有關遮蓋(covering)的一基本定理。我們陳述且證明於下。此引理牽涉到所謂緊緻性(compactness),可參考一般集合論或高等微積分的書(如Apostol (1974))。在此設有一些開區間所構成的一集合C, 及一區間I。對$\forall x \in I$, 若x必屬於C中某一區間,便稱C爲I之一遮蓋。例如, 設$C = \{(-1, 0), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{3}, 2), (\frac{3}{2}, 3)\}$, 則$C$爲$[0, 2]$之一遮蓋。

引理6.2.設C爲一些開區間所構成的集合,且爲閉區間$[a, b]$之一遮蓋。則必存在C的一有限子集C'亦爲$[a, b]$之一遮蓋。

證明.令

$$A = \{x | x \in [a, b], \text{且}[a, x]\text{可爲}C\text{之一有限子集所遮蓋}\},$$

易見$a \in A$, 故$A \neq \emptyset$。又令

$$c = \sup A \text{ 。}$$

可看出$c \leq b$。又因C中的每一元素皆爲開區間,故存在一$(e,f) \in C$, 使得$c \in (e,f)$。由於$c = \sup A$, 故必存在$x_0 \in A$, 使得$x_0 \in (e,f)$。否則$c \neq \sup A$。

因$x_0 \in A$, 依A之定義,存在C之一有限子集,稱之爲B, 爲$[a,x_0]$之一遮蓋。如此一來

$$C' = B \cup \{(e,f)\}$$

爲$[a,c]$之一有限遮蓋,故c亦在A中。底下我們來看事實上$c = b$, 因此C'爲$[a,b]$之一有限遮蓋, 本引理便得證了。

前面已指出$c \leq b$, 若$c < b$, 且設$d \in (c,b) \cap (e,f)$。則因C'爲$[a,d]$一遮蓋,故$d \in A$, 但此卻與$c = \sup A$矛盾。故$c < b$不成立, 即$c = b$。證畢。

在上引理中,C便稱爲$[a,b]$的一開遮蓋(open covering)。此引理指出,對一閉區間的一開遮蓋,必存在一有限的子遮蓋。

現在我們開始證明定理6.8。

給定一$\varepsilon > 0$, 因f在I連續, 故$\forall t \in I$, 存在一$r_t > 0$, 使得$f(t) - \varepsilon/2 < f(x) < f(t) + \varepsilon/2, \forall x \in (t - r_t, t + r_t) \cap I$。令$U_t = (t - r_t/2, t + r_t/2)$。則$\{U_t, t \in I\}$爲$I$之一開遮蓋。因此由引理6.2,存在一有限的子遮蓋,以

$$(t_1 - \frac{r_1}{2}, t_1 + \frac{r_1}{2}), (t_2 - \frac{r_2}{2}, t_2 + \frac{r_2}{2}), \cdots, (t_n - \frac{r_n}{2}, t_n + \frac{r_n}{2})$$

表之。取$\delta = \min\{r_1/2, r_2/2, \cdots, r_n/2\}$。我們將證明此$\delta$ 符合均勻連續中的需求。

對任一$c \in I$, 則c屬於某一$(t_i - r_i/2, t_i + r_i/2), i = 1, \cdots, n$。若$x \in (c - \delta, c + \delta)$, 因$\delta \leq r_i/2$, 故$x$與$c$皆屬於$(t_i - r_i, t_i + r_i)$中。此即表$f(x)$與$f(c)$ 皆在$(f(t_i) - \varepsilon/2, f(t_i) + \varepsilon/2)$中。故$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。亦即若$x \in (c - \delta, c + \delta)$, 便有$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$。由於此$f$與$x$無關,故依定義$f$在$I$上均勻連續。證畢。

習　題　1.6

1. 設
$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}, x\in R,\quad g(x)=\begin{cases} x\ , & x<0\,, \\ x^2, & x\geq 0\ 。\end{cases}$$
求$h(x)=f(g(x))$, 並指出h之連續處 。

2. 設
$$f(x)=\begin{cases} 1\,, & |x|\leq 1\,, \\ 0\,, & |x|>1\,, \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} 2-x^2, & |x|\leq 2\,, \\ 2\qquad, & |x|>2\ 。\end{cases}$$
求$h_1(x)=f(g(x))$ 及$h_2(x)=g(f(x))$,並分別指出h_1及h_2之連續處 。

3. 設$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$爲一$n$次多項式 。試證
   (i) 若$c_0c_n<0$, 試證$f(x)=0$至少有一正根;
   (ii) 若n爲奇數, 試證$f(x)=0$至少有一實根 。

4. 試利用Bolzano定理,分別決定下述各方程式根的範圍 。
   (i) $3x^4-2x^3-36x^2+36x-8=0\,;$
   (ii) $2x^4-14x^2+14x-1=0\,;$
   (iii) $x^4+4x^3+x^2-6x+2=0$ 。

5. 設n爲一正奇數, $a<0$ 。試證方程式$x^n=a$恰有一負根 。

6. 設$f(x)=\tan x$ 。試問爲何雖$f(\pi/4)=1$ 且$f(3\pi/4)=-1$, 但在區間$[\pi/4,3\pi/4]$中,卻無法找到一x使得$f(x)=0$ 。

7. 試證定理6.4 。

8. 設f爲一在$[a,b]$上之連續函數, $a<b$, 且$f(a)\leq a, f(b)\geq b$ 。試證存在一$c\in[a,b]$, 使得$f(c)=c$ 。

9. 設f爲一連續函數,且$f(f(x))=x,\forall x\in R$ 。試證存在一$x\in R$, 使得$f(x)=x$ 。

10. (i) 設函數$f(x)$在$x = 0$連續,且$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in R$。試證$f$在$R$上連續。

    (ii)設函數$f(x)$在$x = 0$連續, 且$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$。試證$f$在$R$上連續。

11. 設f在R上連續, 且對任一有理數x, $f(x) = 1$。試證$f(x) = 1, \forall x \in R$。

12. 設f在$[0,1]$連續,且f只取有理數值。若$f(1) = 1$, 試證$f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$。

13. 試證在定理6.7中, 若連續的假設改爲有界, 則結果不一定成立。

14. 若$|f|$在集合S中有上界,試證f在S中有界。

15. 設f在$[a,b]$連續,利用引理6.2試證f在$[a,b]$爲有界。

16. 設f定義在$[0,1]$上,且

$$f(x) = \begin{cases} x \quad\quad, & \text{若}x\text{爲有理數,} \\ 1-x, & \text{若}x\text{爲無理數。} \end{cases}$$

    試證

    (i) f 只在$x = \frac{1}{2}$ 連續;

    (ii) f的值域爲$[0,1]$。

17. 設f在$[a,b]$連續。試證

    (i) 存在一$c \in [a,b]$, 使得$f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$;

    (ii) 對$\forall 0 \le \lambda \le 1$, 存在$d \in [a,b]$, 使得$f(d) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$。

18. 試證下述函數皆爲均勻連續。

    (i) $f(x) = ax^n$, $I = [c,d]$, $c < d$;

(ii) $f(x)=\sqrt{x}\,,\ I=[1,5]$;

(iii) $f(x)=x^2-x\,,\ I=[-1,1]$;

(iv) $f(x)=2/x\,,\ I=[1,\infty)$ 。

19. 試證下述函數皆不爲均勻連續 。

(i) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}\,,\ I=(1,2)$;

(ii) $f(x)=x^3\,,\ I=(0,\infty)$ 。

20. 試檢驗下述函數何者爲均勻連續,何者不是 。

(i) $f(x)=\sqrt{x}\,,\ I=[0,1]$;

(ii) $f(x)=\frac{x^3+2}{x+1}\,,\ I=[0,\infty)$;

(iii) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,,\ I=[0,1]$;

(iv) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}\,,\ I=[-1,1]$;

(v) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}\,,\ I=(1,2]$;

(vi) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}\,,\ I=[1.01,1.99]$ 。

21. 設f,g皆在R上均勻連續 。

(i)試證$f+g$亦在R上均勻連續;

(ii)試問fg在R上是否均勻連續?證明或否證之 。

22. 設函數f在區間I上均勻連續,試證f在I上亦連續且有界 。

參考文獻

1. Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.