第一章

極限

1.5 極限定理及連續性

函數的極限定理有一些是類似數列極限中的結果, 證明也大都類似 。另外亦有一些數列中沒有的極限定理 。有了這些定理, 可讓我們求更多的極限 。

定理5.1. 設$\lim_{x\to a} f(x) = b$ 且$\lim_{x\to a} g(x) = c$, 則

(i) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c$,

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$,

(iv) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = b/c$, $c \neq 0$ 。

定理5.2.(夾擠定理). 設存在一$\delta > 0$, 使得$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, 且

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b,$$

則

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \text{ 。}$$

上二定理中的常數a, b, c 皆爲實數, 以後我們不再特別聲明, 極限爲正或負無限大我們分別會以∞, 及$-\infty$ 表示出來 。

定理5.3. 設$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, 且存在一$\delta > 0$, 使得$|g(x)| \leq k, \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, 其中$k$ 爲一常數 。則

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 \text{ 。}$$

例5.1. 由於$g(x) = \sin x$ 爲一周期函數, 明顯地$\lim_{x\to\infty} \sin x$ 不存在 。由此可看出$\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ 亦不存在, 但因$|\sin(1/x)| \leq 1, \forall x \neq 0$, 故利用定理5.3 得

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ 。}$$

例5.2. 求

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x^2+2}{x+2} \right) \text{ 。}$$

解. 首先要注意的是我們不可將欲求之極限寫成

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right) - \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x+2} \right),$$

因爲此二極限皆不存在 。須先通分得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+3x^{-1}+2x^{-2}} = \frac{1}{1} = 1,$$

此處用到$x \to \infty$ 時, $x^{-1}, 3x^{-1}, 2x^{-2}$ 皆趨近至0, 再利用定理5.1 。

底下我們介紹連續的概念 。

數學裡一個很重要但同時也常讓人迷惑不已的概念便是連續性(continuity, 形容詞爲continuous) 。

直觀上連續的意思是這樣的: 假設一函數f在某一點a之值爲$f(a)$, 若當x一直接近a時, $f(x)$ 也可任意接近$f(a)$, 則我們說f在a連續。

在微積分發展的早期, 大部分所處理的函數皆爲連續, 因此那時對連續的眞正意義並未深究。直到十八世紀, 在一些物理的問題上才開始出現不連續的函數。這其中特別是傅立葉(Fourier 1758–1830)在熱力學的工作, 促使了十九世紀初期的數學家, 對函數及連續性的意義更小心地去審視。雖然對很多人來說, 連續這個詞是再明白不過了。如連續三天皆下雨; 丟一銅板, 連續三次皆得正面。但要給一個較好的定義並不容易。例如, 在Webster 的字典上有如下的解釋:

continuity: the condition of being continuous, something that continuous without a break 。

continuous: continuing without interruption 。

我們顯然無法由上述解釋了解連續的意思。即使在中文字典上, 如台灣中華書局1986年出版的辭海, 有

連續函數: 數學名詞, 凡函數之增量與其自變數增量同時趨進於零者, 謂之連續函數。

除非你已經知道連續函數的意思, 否則上述解釋也不易了解。至於"趨進"在辭海上則查不到, 不過應是"趨近"才對, 但"趨近" 也查不到。辭海在前述解釋下又加以說明: 例如有函數$y = f(x)$, 若與x一增量Δx, y亦得一增量Δy, 即$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, 當$\Delta x$趨進於零時, Δy亦爲零, 則$f(x)$爲連續函數。讀者可與底下的定義5.1比較, 辭海這段說明不但不完整, 且有一錯誤, 希望各位能看出來。

以上還都是今日常用之中、英文字典上的解釋, 更不要說三百年前, 那時數學家對連續的概念亦是很模糊的。一直到西元1821年, 柯西(Cauchy, 1789-1857)才以$\varepsilon - \delta$ 的方法給出極限的定義, 然後據此給出連續的定義, 此定義爲數學家所滿意, 並延用至今。但這已是經過一百餘年的嘗試了。

定義5.1. 設一函數f在某點a有定義, 且

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a), \tag{5.1}$$

則稱f在a連續。若f在一集合A中每一點皆連續, 則稱f在A連續。若f在其定義域中每一點皆連續, 則稱f為一連續函數。

例5.3. 設$f(x)=1/x$, 則f在每一$x\neq 0$皆連續, 但f在$x=0$不連續, 因0不在f之定義域中。

設$g(x)=1, \forall x\neq 1$, 且$g(1)=3$。則因$\lim_{x\to 1} g(x)=1\neq g(1)$, 故$g$在$x=1$不連續。

一函數f在某點a為連續, 就是在a之極限要存在, 且此極限值就正好是f在a之值$f(a)$。因此(5.1)式又等價於

$$\lim_{x\to a} |f(x)-f(a)|=0\text{。} \tag{5.2}$$

我們已知

$$\lim_{x\to a} x=a\text{。}$$

利用定理5.1得

$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a} x\cdot x\cdots x=a\cdots a=a^n\text{。}$$

甚至若有一m次多項式

$$f(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0,$$

則利用定理5.1可證明

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a), \forall a\in R,$$

即f為一連續函數。又由於有理式(即分式)為二多項式的商, 故定理5.1之(iv)導致

定理5.4.每一有理式在其定義域中皆爲連續函數 。

更一般性的結果如下 。

定理5.5.設f 及g 二函數在a 點皆連續 。則$f+g$, $f-g$ 及fg 皆在a 點連續 。且只要$g(a)\neq 0$, 則f/g 在a 點亦連續 。

系理5.1.設f 及g在集合A上皆爲連續函數, 則$f+g, f-g, fg$在A 上皆連續 。若$g(x)\neq 0, \forall x\in A$, 則$f/g$ 在A亦爲連續 。

例5.4.設

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x}, & x<2\,,\\ x-2 \quad , & x\geq 2\text{ 。}\end{cases}$$

則f 在$x>2$及$x<2$處皆連續 。至於當$x=2$, 因

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = 0 = f(2),$$

故f在$x=2$亦連續 。即f爲一連續函數 。

例5.5.設

$$f(x)=[x+\frac{1}{2}]-[x], x\in R,$$

其中$[\,\cdot\,]$爲最大整數函數, 我們畫f的一部分圖形如下 。

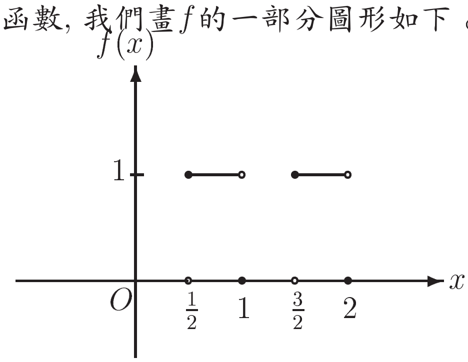

圖5.1.

對每一奇數n, f 在$n/2$ 處之左極限及右極限一個爲0 一個爲1, 二者不等。即f在$n/2$的極限不存在, 因此f在$n/2$ 處不連續。在其餘地方則皆連續。

例5.6. 設

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1},$$

f在$x=1$沒有定義, 且除了在$x=1$皆連續。但因

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1\,,$$

故若令$f(1)=-1$, 則f爲一到處連續之函數。

一函數f在某點a若不連續, 且$\lim_{x\to a} f(x)$存在, 此時如果重新定義f在a之值, 便可使f在a連續, 如例5.6。這種不連續稱爲可移去的不連續(removable discontinuity)。至於例5.5中之不連續點, 我們就無法做類似的處理了, 因$\lim_{x\to n/2} f(x)$ 不存在。例5.5中之不連續點稱爲跳躍的不連續(jump discontinuity)。又由於在$\forall x=n/2$, f之右極限存在且等於$f(n/2)$, 因此我們說f在$n/2$爲右連續(continuous from the right)。同理可定義左連續。可看出若f在某點a既是右連續又爲左連續, 則f在a爲連續。另外, 若$f(x)=1/x^2, x\neq 0, f(0)=0$, 則$f$在0不連續。由於$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$, 我們稱此種不連續爲無限的不連續(infinite discontinuity)。

令$y=f(x)$, 我們可在x-y平面上繪出其圖形。若f 在某點連續, 則在該點其圖形是連接而不中斷的。如果f在某區間爲連續, 則在該區間f之圖形便都沒有中斷。我們總結一下函數的不連續會有下述可能。假設$f(x)$在$x=a$不連續:

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$存在, 但不等於$f(a)$。此情況可能是因f在a沒有定義, 或雖有定義但$f(a)\neq\lim_{x\to a} f(x)$。前者如$f(x)=(x-a)/(x-a)$, 後者如設$a\neq 0$, 而$f(x)=x^2, x\neq a, f(a)=0$。這就是前面所說的可移去的不連續。若重新定義$f(a)$可使$f$在$a$連續。

(ii) $\lim_{x\to a+} f(x)$ 與$\lim_{x\to a-} f(x)$ 皆存在, 但二者不等 。

(iii) $\lim_{x\to a+} f(x)$ 或$\lim_{x\to a-} f(x)$不存在, 但f在a的附近爲有限值 。本節習題最後一題爲一例 。

(iv)$\lim_{x\to a+} f(x)$ 或$\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$ 或$-\infty$ 。如$f(x) = 1/(x-a)^2$ 。

後三種不連續稱爲本質的(essential), 因無法重新定義$f(a)$之值使f成爲在a連續 。

大家學過合成函數, 經由函數的合成, 我們可得到各式各樣的函數 。下述定理爲關於合成函數的極限, 其證明留在習題 。

定理5.6. 設$\lim_{x\to a} g(x) = b$, 且f在b 連續, 則

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b) \text{ 。} \tag{5.3}$$

例5.7. 首先不難證明對$\forall a > 0$, 及正整數n,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \tag{5.4}$$

因此$f(x) = \sqrt[n]{x}$在每一$x > 0$處連續 。利用此結果及定理5.6便得

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{2x^2-7x+6}{x^2-3x+2}} = \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-7x+6}{x^2-3x+2}} = \sqrt{1} = 1 \text{ 。}$$

其他尚有一些關於極限爲無限大的結果 。設

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty\,, \lim_{x\to a} g(x) = c \text{ 。}$$

則

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty\,,\\
&\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \infty\,,\\
&\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \begin{cases} \infty \;, & \text{若}c > 0\,,\\ -\infty\,, & \text{若}c < 0\,,\end{cases}
\end{aligned}$$

$c=0$則視情況而定(試自己舉一些例子來討論), 我們以後會再探討。另外,

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\begin{cases}\infty\ \ , & 若 c>0\,,\\ -\infty\,, & 若 c<0\ 。\end{cases}$$

還有不少可寫的, 如左極限、右極限、$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ 等, 我們不一一列舉各種可能。這些都不難模仿或修改現有定理的證明而得到。

本節最後我們來看幾個較特殊的極限。

例5.8.設有一函數

$$f(x)=\begin{cases}1/q\,, & 若 x=p/q, p, q \text{ 爲互質整數}, q>0,\\ 0\ \ , & 若 x=0 \text{ 或無理數 。}\end{cases}$$

試證f在每一無理數及0 爲連續。

證明.由於在任一給定的有理數p/q的任一鄰域中皆有無理數存在, 而f在無理數的值爲0, 與f在該有理數的值有一固定的差異$1/q$, 所以f在有理數(除了零之外)不連續是很明顯的。

現設$0<a<1$爲一無理數, 則$f(a)=0$。對在a之任一鄰域中的一無理數x, $f(x)=0=f(a)$, 故我們只需檢驗有理數即可。

我們的基本想法是這樣的: a 爲無理數, 無法表示成分數, 如果要得到一以分數表示的近似值(即此分數與a很接近), 此分數的分子與分母皆須很大才行。

對一給定的正整數q, 分母$\leq q$之眞分數只有有限多個($q(q-1)/2$個), 這些數當中, 只有一個距a最近(不可能有二分數與a等距, 否則a亦爲有理數)。此數與a之距離以δ表之。

在區間$(a-\delta, a+\delta)$ 中之任一有理數$x=p_1/q_1$, 因比前述分數都更接近a, 因此並非它們中的一個, 故$q_1>q$, 且

$$f(x)=\frac{1}{q_1}<\frac{1}{q}\ 。$$

現給一$\varepsilon > 0$, 取q 爲大於$1/\varepsilon$之最小正整數, 然後依前述說明找出δ 。則對任一$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 中的有理數x, 設$x = p_1/q_1$, 由前述說明知$q_1 > q > 1/\varepsilon$ 。因此

$$|f(x) - f(a)| = |\frac{1}{q_1}| = \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} < \varepsilon \text{ 。}$$

故依定義知

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0,$$

因此f在a連續 。

至於若a爲0或一不在(0,1)間的無理數, 仿前述證法, 可得f在a亦連續, 此部分我們留給讀者自行討論 。

在1.3 節我們曾導出

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e, \tag{5.5}$$

其中極限是沿著正整數$n = 1, 2, \cdots$ 取的 。此結果可推廣到函數的情形 。

例5.9.試證

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \text{ 。} \tag{5.6}$$

證明.每一$x \in R$, 滿足

$$[x] \leq x < [x] + 1, \tag{5.7}$$

其中$[\cdot]$ 爲最大整數函數 。由(5.7)得, 對$\forall x > 0$,

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]} \text{ 。}$$

由此又得

$$(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} \quad < \quad (1 + \frac{1}{x})^{[x]}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1+\frac{1}{x})^x \\ &\leq (1+\frac{1}{[x]})^x \\ &\leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} \text{。} \end{aligned}$$

由(5.5)式又可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1} = e\,,$$

及

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n}) = e \text{。}$$

故

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = e,$$

再由夾擠定理即得證(5.6)式。

利用(5.6), 也可如下地證明

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \text{。} \tag{5.8}$$

令$u=-x$, 則

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x &= \lim_{u\to\infty}(1-\frac{1}{u})^{-u} \\ &= \lim_{u\to\infty}(\frac{u-1}{u})^{-u} \\ &= \lim_{u\to\infty}(\frac{u}{u-1})^{u} \\ &= \lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u-1})^{u} \\ &= \lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u-1})^{u-1}(1+\frac{1}{u-1}) \\ &= e \text{。} \end{aligned}$$

即不論$x\to\infty$ 或$x\to-\infty, (1+1/x)^x$ 皆趨近至e。

(5.6)之另一變形爲(證明留在習題)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \text{ 。} \tag{5.9}$$

事實上對$\forall x\in R$,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x, \tag{5.10}$$

不過其證明超出目前我們所學的, 因此留在第5.3 節再證明 。另外, 即使是(5.6) 式, 我們也假設大家對指數有充分的了解, 而不會質疑$(1+1/x)^x$ 的意義 。在第五章我們會重新對指數給嚴密的定義 。

三角函數在微積分中扮演著重要的角色 。在微積分裡, 通常角度是取弳度(radian measure), 而一圓周之角度爲2π 。我們先看二簡單的結果:

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0, \tag{5.11}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \text{ 。} \tag{5.12}$$

(5.11)可利用$y=\sin x$ 爲奇函數且(見圖5.2)

$$0<\sin x<x\,,\forall 0<x<\frac{\pi}{2}, \tag{5.13}$$

再用夾擠定理即得 。至於(5.12), 先利用(5.13), 得下述不等式

$$0<1-\cos x\le 1-\cos^2 x=\sin^2 x<x^2\,,\forall 0<x<\frac{\pi}{2},$$

再用夾擠定理及$y=\cos x$ 爲偶函數便可得到 。由(5.11)及(5.12)即得$f(x)=\sin x$及$g(x)=\cos x$ 在$x=0$皆連續 。而再利用

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h, \tag{5.14}$$

及

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h \tag{5.15}$$

二公式, 分別令$h\to 0$, 即得$f(x)=\sin x$ 及$g(x)=\cos x$ 皆爲連續函數 。

至於$\tan x = \sin x / \cos x$在$\cos x \neq 0$ 處, 即$x \neq \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$, 皆連續 。其他三角函數如$\cot x, \sec x, \csc x$ 之不連續處也很明顯可寫出 。

底下我們證明微積分中有關於三角函數的一重要的極限結果 。

定理5.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ 。 \tag{5.16}$$

證明.對$0 < x < \pi/2$, 有下述圖形 。

C B x $\tan x$ $\sin x$ x O D A

圖5.2.

如圖5.2有一半徑爲1之扇形, 即$OA = OB = 1, \angle AOB = x$, $CA \perp OA$ 。取$0 < x < \pi/2$ 。經由比較$\triangle OAB$, 扇形OAB 及直角三角形OAC的面積, 可得下述不等式

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x\ 。$$

由此又得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,, \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}\ 。$$

由於$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, 故由夾擠定理得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1\ 。$$

至於在$x = 0$ 之左極限, 利用$\sin(-x) = -\sin x$, 若$x < 0$, 則$-x > 0$, 且$\sin x / x = \sin(-x)/(-x)$, 因此

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1\ 。$$

故得證(5.16)成立 。

利用定理5.7, 即得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\end{aligned}$$

(注意可以拆成二極限的積, 是因二極限皆存在);

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{x}{\sin x}\cdot 2\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x/x}\cdot 2\\ &= 1\cdot 1\cdot 2 = 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x}\cdot \sin x\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 = 0\text{ 。}\end{aligned}$$

最後, 下式也不難得到(證明留在習題):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\text{ 。} \tag{5.17}$$

(5.16)之極限是不定形(indeterminate form)的一種 。因當$x\to 0$時, $\sin x/x$之分子與分母皆趨近至0, 因此有$0/0$的形式, 無法立即得知極限值爲何 。這類極限我們以後會再深入探討 。

習　題　1.5

1. 引用適當的定理及已知的結果求下述極限 。

   (i) $\lim_{x\to a}(x^5+3x^2+2x+1)$, (ii) $\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$,
   (iii) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(x+2)}{x+1}$, (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2}$ 。

2. 求下述極限 。

(i) $\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{2-\sqrt{t^2+3}}$,
(ii) $\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}$,
(iii) $\lim_{y\to\infty}(\sqrt{1+y}-\sqrt{y})$,
(iv) $\lim_{n\to-\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1})$,
(v) $\lim_{m\to 0}\frac{\sqrt{4+m+m^2}-2}{\sqrt{4+m-m^2}-2}$,
(vi) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{9-x+x^3}-3}$,
(vii) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{h}}+2}{h-27}$,
(viii) $\lim_{m\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+m^2+m^3}-\sqrt[3]{8+m}}{\sqrt[3]{8+m}-\sqrt[3]{8+m^2-m^3}}$,
(ix) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x^5}-\sqrt[5]{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}-\sqrt[3]{1-x^2}}$,
(x) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+t^5}-\sqrt[3]{1+t^3}}{t^3}$。

3. 求下述各極限。

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}$,
(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$,
(v) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$, (vi) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$,
(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$, (viii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin x}{\sin 2x}$,
(ix) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$, (x) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$,
(xi) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}$, (xii) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$。

4. 設f, g 分別爲m 及n 次多項式, $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_0$, $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_0$。求

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, (ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, (iii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$。

5. 試證(5.9) 式。

6. 求$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{x^{-2}}$及$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\sin x}$。

7. 設$acdf\neq 0$, 求

$$\lim_{x\to\infty}(\lim_{y\to\infty}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2})-\lim_{y\to\infty}(\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bxy+cy^2}{dx^2+exy+fy^2})\text{。}$$

8. 試證下述各極限不存在。

(i) $\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+1}$, (ii)$\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{x+2}$,
(iii) $\lim_{y\to 0}\frac{|y|-y}{y}$, (iv)$\lim_{y\to 1}\frac{|y-1|-y+1}{|y-1|+y-1}$,
(v) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-x}{|x|^3-x^3}$, (vi) $\lim_{x\to 2}(x-[x])$, $[\,\cdot\,]$爲最大整數函數。

9. 設$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, 試證$\lim_{x\to 0+} f(1/x)=b$。

10. (i) 設$\lim_{x\to a} f(x)=b$, 試證$\lim_{x\to a}|f(x)|=|b|$;

    (ii) 設f爲一連續函數, 試證$|f|$亦爲一連續函數。

11. 若$\lim_{x\to a}|f(x)|=b$, 試問$\lim_{x\to a} f(x)$是否必存在且等於b或$-b$?

12. 若$\lim_{x\to a} f(x)$存在, 試證其極限值必唯一。

13. 設

$$f(x)=\begin{cases}\sin x \quad, & x\le c\,,\\ ax+b, & x>c\,,\end{cases}$$

其中a,b,c 爲常數。若b,c 爲已知, 試決定a之值, 使f爲一連續函數。

14. 對下述函數重做上題。

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x \ , & x\le c\,,\\ ax^2+b, & x>c\ 。\end{cases}$$

15. 設$f(x)=x\sin(1/x), x\neq 0$, 且$f(0)=1$。試證f在$x=0$爲一可移去之不連續, 並重新定義$f(0)$使f在$x=0$連續。

16. 設$f(x)=\tan x/x, x\neq 0$。問是否可定義$f(0)$之值, 使得f在$x=0$連續。

17. 討論下述函數之連續性。

    (i) $f(x)=\frac{|x|}{x}$, (ii) $f(x)=\frac{x+a}{x-a}$,
    (iii) $f(x)=\frac{|x^2+1|}{x+1}$, (iv) $f(x)=x\sin(1/x), x\neq 0, f(0)=0$。

18. 設f之定義域爲$[0,\infty)$, 且

$$f(x)=\begin{cases} p\sin(1/q)\,, & 若x=p/q,\ (p,q)=1, q\geq 1\,,\\ x & ,\ 若x爲無理數或0\ 。\end{cases}$$

試問f在$x=0$是否連續?

19. 設

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 若x爲有理數,\\ x, & 若x爲無理數\ 。\end{cases}$$

討論f之連續性 。

20. 令$f(x)=\lim_{n\to\infty}x^n$, $x\in[0,1]$ 。討論f之連續性, 並繪f之圖形 。

21. 令$f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ 。討論f之連續性, 並繪f之圖形 。

22. 設$f(x)=[1/x], x\neq 0$, 其中$[\ \cdot\ ]$爲最大整數函數 。試繪f在區間$[-2,-1/5]$ 之圖形, 並指出其不連續處 。

23. 分別對$f_1(x)=(-1)^{[1/x]}, x\neq 0$, 及$f_2(x)=x(-1)^{[1/x]}, x\neq 0$, 重做上題 。

24. 試證定理5.1 。

25. 試證定理5.2 。

26. 試證定理5.3 。

27. 試證定理5.6 。

28. 試繪

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0,$$

之圖形 。是否可定義$f(0)$, 使得f 在$x=0$ 連續? 又f 之圖形與$g(x)=\sin x$ 之圖形有何相似及相異處?

29. 設$a_n = \sum_{i=1}^{n} 9/10^i$, $n \geq 1$ 。試求

(i) $\lim_{n\to\infty}[a_n]$, (ii) $[\lim_{n\to\infty} a_n]$ 。