第一章

極限

1.4 函數的極限

前面我們討論數列的極限,對一數列$\{a_n, n \geq 1\}$,我們通常只會問$n \to \infty$ 時a_n之極限, 而不會問$n \to 5$時, a_n之極限,此因n只能等於1, 2, 3, 4, 5,$\cdots$, 所以若n很接近5,則求a_5即可 。但若給一函數$f(x)$,則對於$x \to 5, x \to -3.2, x \to \infty$ 或$x \to -\infty$時, $f(x)$趨近至何值, 這種問題便有意義了 。而且我們可利用數列極限的定義來定義函數的極限 。

設有一函數$f(x)$,我們想知道$x \to a$時, $f(x)$會趨近至何值? 首先a不一定要在f之定義域 。此正如對數列$\{a_n, n \geq 1\}$,雖∞並不在其定義域$\{1, 2, \cdots\}$中, 不過我們仍可問$\lim_{n\to\infty} a_n$爲何 。但我們卻須要求f在a的附近有意義才行 。我們先給一定義 。

定義4.1.設$c \in R$,則實數上任一包含c之開區間稱爲c之一鄰域(neighborhood) 。即c之一鄰域必爲(a, b)的形式,其中$a < c < b$, 而對$\forall r > 0, (c - r, c + r)$稱爲$c$ 之一半徑爲r的對稱鄰域(symmetric neighborhood of c of radius r) 。若(a, b)爲c之一鄰域, 則$(a, b)\setminus\{c\} = (a, c) \cup (c, b)$稱爲$c$ 之一去心鄰域(deleted neighborhood) 。

不難看出c的每一鄰域必包含一對稱鄰域。在討論函數的極限時,我們常藉助鄰域的概念。因此欲求$\lim_{x\to a} f(x)$, 首先f在a的一去心鄰域中要有定義,至於$f(a)$有無定義倒是沒有關係的。因我們只是想求當x一直接近a時, $f(x)$會趨近至何值,並不是想求$f(a)$。所以諸如求

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},$$

雖然在$x=1$或$x=0$分別會使$(x^2+x-2)/(x-1)$及$\sin x/x$之分母爲0,但此二極限問題仍是有意義的。

有時我們也會只考慮一個方向的極限(見稍後的定義4.3), 如自a的左邊,也就是比a小處趨近a,此時以$x\uparrow a$或$x\to a-$表之。同理有$x\downarrow a$(或$x\to a+$), 表自a的右邊趨近至a。即有時會求$\lim_{x\to a+}$或$\lim_{x\to a-}$, 分別稱爲右極限(right-hand limit)及左極限(left-hand limit),合稱單側極限(one-sided limit)。

現在來看$\lim_{x\to a} f(x)$ 是什麼意思? 先看$x\to a$。假設有數列$a_n=a+n^{-1}$, 或$a_n=a-n^{-1}$, $n\geq 1$。將$x=a_n$ 代入$f(x)$, 便得數列$\{f(a_n), n\geq 1\}$, 則$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ 的意義我們已知道。如果對任一數列$\{a_n, n\geq 1\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$, 且$a_n\neq a$, $\forall n\geq 1$, 皆使$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ 存在且等於同一值b, 則我們說$x\to a$ 時, $f(x)\to b$, 且以$\lim_{x\to a} f(x)=b$ 表之。同理可定義$\lim_{x\to a+} f(x)=b$ 及$\lim_{x\to a-} f(x)=b$。

當然我們立刻發現若想求$\lim_{x\to a} f(x)$將是一件大工程,因須對每一會趨近a的數列$\{a_n, n\geq 1\}$, 都去求$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$, 理論上是件不易的工作。我們可仿照在1.1節, 定義數列的極限時,藉由解析趨近的內涵, 而給出極限的定義。

設$|a|<\infty, |b|<\infty$。對於$\lim_{x\to a} f(x)=b, f(x)\to b$是我們最終的目的, 而在什麼情況下要達到此目的? 在$x\to a$之下。我們並不是要達到$f(x)=b$, 只是要$f(x)\to b$, 所以可先定個誤差ε, 而希望$|f(x)-b|<\varepsilon$。我們要在x很接近a時達到此目標, x不夠接近a時, $|f(x)-b|<\varepsilon$不成立則沒有關係。因此若能找到一$\delta>0$, 使得當$|x-a|<\delta$,且$x\neq a$時, $|f(x)-b|<\varepsilon$, 我們便滿意了。若對任

意一$\varepsilon > 0$, 皆可找到前述的δ(可看出δ 與ε 有關), 便可說$x \to a$ 時, $f(x) \to b$了 。一般的書便以此做爲極限的定義 。

定義4.2.若$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$, 使得當$0 < |x-a| < \delta$時, $|f(x) - b| < \varepsilon$, 則稱$x \to a$時, $f(x) \to b$, 且以

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{4.1}$$

表之 。此時稱$f(x)$之極限存在且等於b 。

上述定義就是所謂以$\varepsilon - \delta$的方法來定義極限, 在數學中通常便是以這種方式來描述極限 。

有些書是把定義4.2當做一定理, 即採用以數列的極限來定義函數的極限, 而將定義4.2 當做其推論 。下述定理也被某些書採用爲函數極限的定義 。

定理4.1.(4.1)式成立, 若且唯若對每一b的鄰域N_b, 存在一a的去心鄰域D_a, 使得$x \in D_a$時, $f(x) \in N_b$ 。

註.D_a當然要包含於f之定義域中, 我們把此視爲是一定要的,而不再特別強調 。

證明.由於對稱鄰域亦爲一鄰域, 且任一a 的鄰域必包含一對稱鄰域, 故"若" 的部分是很明顯然的,其次看"唯若" 部分 。

若(4.1)式成立,則由定義4.1知, 每一$\varepsilon > 0$, 存在一$\delta > 0$, 使得$0 < |x-a| < \delta$時, $|f(x) - b| < \varepsilon$ 。現對每一b之鄰域N_b, 必存在一$\varepsilon > 0$,使得$(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset N_b$ 。對此ε, 存在一$\delta > 0$, 使得$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$時, $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset N_b$ 。取$D_a = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$爲$a$之一去心鄰域,即證出對一給定的$N_b$, 存在一$D_a$, 使得$x \in D_a$時, $f(x) \in N_b$ 。證畢 。

由於有定理4.1, 往後在證明(4.1)式時, 我們常將定義4.2及定理4.1混著用, 即有時考慮對稱的鄰域, 有時考慮一般的鄰域, 甚至有時一個用對稱一個用一般的鄰域(注意(4.1)式中牽涉到兩個鄰

域)。底下我們給幾個例子。

例4.1.設$a>0$爲一常數,試證$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$。
證明.我們想要達成對$\forall\varepsilon>0$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon\text{。}\tag{4.2}$$

而上式等價於

$$\sqrt{a}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{a}+\varepsilon\text{。}$$

我們想將上式每一項平方,這樣可以得到x的一鄰域,但因$\sqrt{a}-\varepsilon$不一定爲正, 平方後不等式就不一定仍成立(試想$-3<2<5$的情形)。先取$\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\sqrt{a}\}$。由於$\varepsilon_1\le\varepsilon$,故若

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon_1\,,\tag{4.3}$$

則(4.2)式成立。而(4.3)式等價於

$$\sqrt{a}-\varepsilon_1<\sqrt{x}<\sqrt{a}+\varepsilon_1\text{。}$$

將上述不等式每項平方後,仍維持不等關係。即

$$a-(2\sqrt{a}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2)<x<a+(2\sqrt{a}\varepsilon_1+\varepsilon_1^2)\text{。}$$

由於$2\sqrt{a}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2=\varepsilon_1(2\sqrt{a}-\varepsilon_1)>0$, 故只要

$$x\in(a-2\sqrt{a}\varepsilon_1+\varepsilon_1^2,a)\cup(a,a+2\sqrt{a}\varepsilon_1+\varepsilon_1^2)$$

(此爲a之一去心鄰域),則(4.3)成立,因此(4.2)成立。如此便得證(4.2)了。

當然由於$0<2\sqrt{a}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2<2\sqrt{a}\varepsilon_1+\varepsilon_1^2$,故若眞想要求出$\delta$, 則可取$\delta=2\sqrt{a}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2$, 則$0<|x-a|<\delta$時, $|f(x)-b|<\varepsilon$。

例4.1是一種證明極限結果的典型, 即反湊法。由上例可看出對一給定的$\varepsilon>0$, 若欲找一$\delta>0$, 使得$0<|x-a|<\delta$時, $|f(x)-b|<\varepsilon$,

則對$\forall 0<\varepsilon_1<\varepsilon$, 若找到的$\delta$會令$0<|x-a|<\delta$時, $|f(x)-b|<\varepsilon_1$, 便可以了。另外,若找到一δ適用, 則$\forall 0<\delta_1<\delta$也必適用。對鄰域也有類似的情況。

在例4.1中,若$a=4$, 且給$\varepsilon=0.01$, 則$\varepsilon_1=0.01, \delta=2\sqrt{a}\varepsilon_1-\varepsilon_1^2=2\cdot 2\cdot 0.01-0.01^2=0.0399$。即$x\in(3.9601,4)\cup(4,4.0399)$時, $|\sqrt{x}-4|<0.01$。

例4.2.設$f(x)=\sqrt{x+3}$, 底下以$\varepsilon-\delta$的方法證明$\lim_{x\to 1}f(x)=2$。
證明.$\forall\varepsilon>0$, 欲找一$\delta>0$, 使得$0<|x-1|<\delta$時,

$$|f(x)-2|<\varepsilon\text{。}\tag{4.4}$$

而

$$|\sqrt{x+3}-2|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}\right|\text{。}$$

不妨先限制$|x-1|<1$(也就是我們找的δ要滿足$\delta\le 1$), 即$0<x<2$, 則

$$3<\sqrt{3}+2<\sqrt{x+3}+2\text{。}$$

因此

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right|<\frac{1}{3},$$

故

$$|\sqrt{x+3}-2|<\frac{1}{3}|x-1|\text{。}$$

故若$0<|x-1|<3\varepsilon$,則(4.4)成立。不過要留意的是剛才我們限制$\delta\le 1$, 故若取$\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$, 則$0<|x-1|<\delta$時,(4.4)成立。證畢。

上例也是一個典型, 在解析$|f(x)-b|$時, 我們常可先對x做一些限制, 而使$|f(x)-b|$ 有一較簡單形式的上界, 且爲$|x-a|$之一常數倍, 如此便易找出δ了。當然讀者也可試利用例4.1的方法做例4.2。再

看一例。

例4.3.設$f(x)=(x+3)^{-1/2}$, 底下證明$\lim_{x\to 1} f(x)=1/2$。
證明.首先

$$\begin{aligned}|f(x)-\frac{1}{2}| &= \left|\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}}\right| = \left|\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{2\sqrt{x+3}(2+\sqrt{x+3})}\right| \\ &= \frac{|x-1|}{4\sqrt{x+3}+2x+6}\text{。}\end{aligned}$$

因此若限制$|x-1|<1$, 即$0<x<2$, 則因$4\sqrt{x+3}+2x+6>6$,故

$$|f(x)-\frac{1}{2}|<\frac{1}{6}|x-1|\text{。}$$

可看出$\forall\varepsilon>0$, 只要取$\delta=\min\{1,6\varepsilon\}$, 則當$0<|x-1|<\delta$時, $|f(x)-1/2|<\varepsilon$。得證。

以上三例的極限值都可很容易地看出。例如, 在例4.3中當x很接近1時, 由觀察法便看出$f(x)$接近$(1+3)^{-1/2}=1/2$。雖極限值一下子就可看出,但卻也要花一番功夫才能證出。不過有時極限值並不是很容易可看出,如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \text{ 或 } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\text{。}$$

這類極限我們陸續會討論。底下先給幾個極限不存在的例子。

例4.4.設

$$f(x)=\begin{cases} x+2\ , & x>0\,,\\ 2x+1\,, & x\le 0\text{。}\end{cases}$$

則因x由右側趨近至0時, $f(x)\to 2$, x由左側趨近到0時,$f(x)\to 1$, 故$x\to 0$時,$f(x)$之極限不存在。

我們會給一般性的結果在定理4.2。

例4.5.設

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若}x^{-1}\text{爲整數},\\ x, & \text{若}x^{-1}\text{不爲整數}。\end{cases}$$

即若$x\in S=\{\cdots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$, 則$f(x)=1$, 否則$f(x)=x$。試證$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在。

證明.設$\lim_{x\to 0}f(x)=b$, 其中b爲某一實數。我們分三種情況證明皆不合。

(i) 設$b>0$。取$\varepsilon=b/2$。對$\forall\delta>0$, 在$(0,\delta)$中必存在一$x\notin S$, 且$x<b/2$ (在$(0,\delta)$中找一小於$b/2$之無理數即可),則

$$f(x)=x<b/2。$$

故$|f(x)-b|>b-b/2=b/2\geq\varepsilon$。因此$\lim_{x\to 0}f(x)\neq b$。

(ii) 設$b=0$。取$\varepsilon=1/2$。對$\forall\delta>0$, 在$(0,\delta)$中必存在一$x\in S$, 則$|f(x)-b|=|f(x)|=1\notin(-\varepsilon,\varepsilon)$。因此$\lim_{x\to 0}f(x)\neq b$。

(iii) 設$b<0$。仿(i)可得$\lim_{x\to 0}f(x)\neq b$。

例4.6.設

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若}x\text{爲有理數},\\ 0, & \text{若}x\text{爲無理數}。\end{cases}$$

則仿例4.5之討論可證出$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在,甚至$\lim_{x\to a}f(x)$不存在,$\forall a\in R$(見習題第1題)。

其次我們討論其他各種極限,首先看前面已提過的右極限及左極限。

定義4.3.若對$\forall\varepsilon>0$, 存在一$\delta>0$, 使得對$\forall x\in(a,a+\delta)$, $|f(x)-b|<\varepsilon$, 則稱f在a之右極限爲b, 以$\lim_{x\to a+}f(x)=b$表之。若對$\forall\varepsilon>0$, 存在一$\delta>0$, 使得對$\forall x\in(a-\delta,a)$, $|f(x)-b|<\varepsilon$, 則稱f在a之左極限

爲b,以$\lim_{x\to a-} f(x)=b$表之。$x\to a+$ 或$x\to a-$又可分別以$x\downarrow a$或$x\uparrow a$表之。

例4.7.明顯地
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\text{不存在},$$
但
$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=1\,,\text{且}\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1\text{。}$$

事實上有下述定理。

定理4.2.設有一函數f, 則$\lim_{x\to a} f(x)=b$, 若且唯若

(4.5)
$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=b\text{。}$$

證明.若$\lim_{x\to a} f(x)=b$, 則$\forall\varepsilon>0$, 存在一$\delta>0$, 使得若$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$, 則$|f(x)-b|<\varepsilon$。由定義4.3知, 此即導出(4.5)成立。

其次設(4.5)成立。則$\forall\varepsilon>0$, 存在一$\delta_1>0$, 使得
$$|f(x)-b|<\varepsilon\,,\forall x\in(a-\delta_1,a)\,,$$
且存在一$\delta_2>0$,使得
$$|f(x)-b|<\varepsilon\,,\forall x\in(a,a+\delta_2)\text{。}$$
故若取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,則
$$|f(x)-b|<\varepsilon\,,\forall x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\text{。}$$
依定義知此即表$\lim_{x\to a} f(x)=b$。得證。

由定理4.2知,若一函數f在某點a之左極限與右極限有一不存在,或雖二者皆存在,但其值不同,則f在a之極限不存在。

例4.8.設$f(x)=[x], x\in R$, 表最大整數函數。因對每一整數n,

$$\lim_{x\to n+}[x]=n\,,\ \lim_{x\to n-}[x]=n-1\,,$$

二者不等, 故$\lim_{x\to n}[x]$不存在。至於若a不爲整數,則

$$\lim_{x\to a}[x]=[a]\ 。$$

例4.9.設

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1\,, & x\geq 1\,,\\ x\qquad\ , & x<1\ 。\end{cases}$$

則

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=3\,,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=1\,,$$

且$\lim_{x\to 1}f(x)$不存在。

有時一函數f,在x很接近a時,其值會無止盡的增大,明確一點講我們有下述定義。

定義4.4.若$\forall k>0$, 存在一$\delta>0$, 使得

$$f(x)>k, \forall x\in(a,a+\delta)\,,$$

則稱f在a之右極限爲無限大,且以

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\infty$$

表之。若$\forall k>0$, 存在一$\delta>0$, 使得

$$f(x)<-k\,, \forall x\in(a,a+\delta)\,,$$

則稱f在a之右極限爲負無限大,且以

$$\lim_{x\to a+}f(x)=-\infty$$

表之。

同理可定義

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\infty\,,\ \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty,$$

及

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty\,,\lim_{x\to a} f(x)=-\infty\text{ 。}$$

當然,由於∞ 及$-\infty$ 皆非實數,所以上述幾種情況都屬於極限不存在。

例4.10.設$f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$。直覺來看$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$, 底下我們來驗證此事。$\forall k>0$, 想使

$$\frac{1}{x}>k\,,$$

而此即(注意x由0的右側趨近過來)

$$0<x<\frac{1}{k}\text{ 。}$$

故若取$\delta=k^{-1}$, 則對$\forall x\in(0,\delta), f(x)>k$。依定義此即表$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$。

另外,亦可證明

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty\text{ 。}$$

甚至我們有更一般的結果

$$\lim_{x\to a+}\frac{1}{(x-a)^p}=\infty\,,\ p>0\,, \tag{4.6}$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{1}{(x-a)^p}=-\infty\,, p=r/s,\ \text{其中}r,s\text{ 爲二正奇數 。} \tag{4.7}$$

令$y=f(x)$, 若$\lim_{x\to a+}f(x)=\infty$, 則在$x=a$之右側, f之圖形大致如圖4.1。

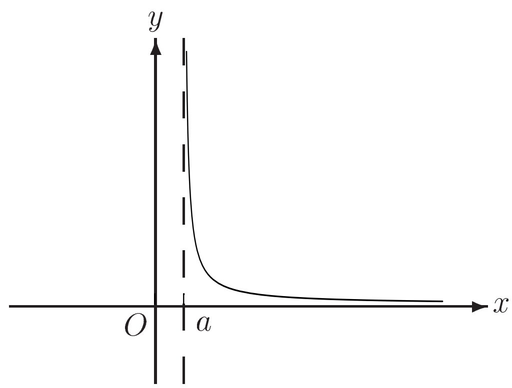

圖4.1.

即當x由a之右側愈來愈接近a時, f 之圖形會愈來愈接近直線$x = a$ 。因此直線$x = a$稱爲f之圖形的一漸近線(asymptote) 。

更一般地, 若$\lim_{x\to a+} f(x)$及$\lim_{x\to a-} f(x)$二者至少有一爲∞或$-\infty$, 則直線$x = a$稱爲f之圖形的一垂直漸近線(vertical asymptote) 。

我們尚有下述定義 。

定義4.5.若$\forall\varepsilon > 0$, 存在一$k > 0$, 使得$|f(x) - b| < \varepsilon, \forall x > k$, 則稱$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ 。

同理可定義$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ 。

例4.11.我們驗證

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \text{ 。} \tag{4.8}$$

而$\forall\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{x^3} - 0\right| < \varepsilon$$

即爲(注意因$x \to \infty$, 故只考慮$x > 0$)

$$0 < \frac{1}{x^3} < \varepsilon \text{ 。}$$

而上式等價於$x > \varepsilon^{-1/3}$。故若取$k = \varepsilon^{-1/3}$, 則若$x > k, |f(x)| < \varepsilon$。依定義知(4.8)成立。

較一般的結果其證明留在習題。

(4.9) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0\,,\quad a \in R, p > 0\text{。}$$

有時x很大時,$f(x)$也變成很大,這就是下述定義。

定義4.6.若$\forall k > 0$, 存在一$n > 0$, 使得$f(x) > k, \forall x > n$, 則以

(4.10) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

表之。

同理可定義

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\text{。}$$

以上這些就是我們主要會討論的極限定義。將這幾個定義相互比較,讀者應逐漸會體會其原理。有些問題我們由觀察法便可看出其極限,但有些較複雜的問題,非經一番嚴密的證明, 是不容易決定其極限的。極限是微積分的基礎,此概念若能弄清楚,往後很多理論都變成順理成章了。

例4.12.設$f(x) = x^2$。對$\forall k > 0$, 取$n = \sqrt{k}$, 則$x > n = \sqrt{k}$時, $f(x) = x^2 > n^2 = k$, 依定義知$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$。

下述更一般的結果其證明留在習題。

(4.11) $$\lim_{x\to\infty} (x-a)^p = \infty\,, a \in R\,, p > 0\text{。}$$

令$y = f(x)$, 若$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, 則知當$x$很大時,$f(x)$之值會很接近$b$, 且其圖形會很接近直線$y = b$。即直線$y = b$爲$f$之圖形的一

漸近線。亦即若

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b,$$

則直線$y = b$稱為f之圖形的一水平漸近線(horizontal asymptote)。

例4.13.試繪

$$y = \frac{4x^2}{x^2+1}$$

之圖形。

解.

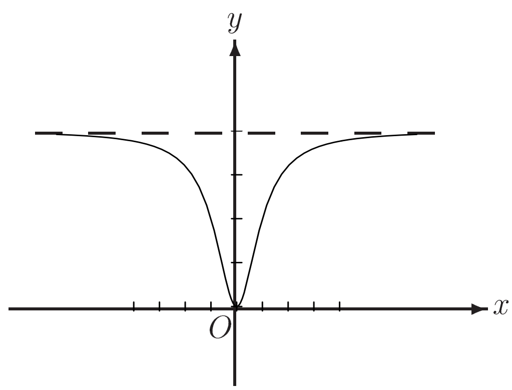

圖4.2.

首先可看出圖形對稱於y軸(偶函數)。又因

$$0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1,$$

故$0 \le y < 4$。又

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2+1} = 4,$$

故$y = 4$為水平漸近線。將y改寫為

$$y = \frac{4x^2}{x^2+1} = 4 - \frac{4}{x^2+1},$$

則明顯看出在$x > 0$處y為漸增。有了上述諸性質, 再經描繪幾個點, 不難得到上圖。

習　題　1.4

1. 試證對例4.6中之函數$f, \lim_{x\to a} f(x)$不存在, $\forall a\in R$ 。

2. 求下述各極限, 其中$[\cdot]$ 爲最大整數函數 。

   (i)$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$, (ii) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$,
   (iii)$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$, (iv)$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$,
   (v) $\lim_{x\to 0}\tan x$, (vi)$\lim_{x\to 0}x^2\cos 5x$,
   (vii)$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, (viii) $\lim_{x\to 0+}\frac{|x^3|}{x^3}$,
   (ix)$\lim_{x\to 1-}(1-x+[x]-[1-x])$, (x)$\lim_{x\uparrow 2}[x^2+1]$,
   (xi)$\lim_{t\to -1+}\frac{\sqrt{1+t}}{1+t^5}$, (xii)$\lim_{x\to 0+}\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2-1}$ 。

3. 求下述各極限 。

   (i)$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4+x^2}-x)$, (ii)$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x+3x^2}{1+x^2}$,
   (iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-6}}{x+5}$, (iv)$\lim_{x\to -\infty}\frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{1-4x^3}}$,
   (v) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+x}}{x}$, (vi) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{x^2+2}{x+2})$ 。

4. 依$\varepsilon-\delta$的方法證明下述各極限 。

   (i)設$f(x)=c, \forall x\in R$, 則$\lim_{x\to a}f(x)=c, \forall a\in R$,
   (ii)$\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$,
   (iii)$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+x}}=\frac{1}{2}$,
   (iv)$\lim_{x\to 4}\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$,
   (v)$\lim_{x\to -2}(x^2+x)=2$ 。

5. 試決定下述各圖形之漸近線,並繪其圖 。

   (i) $f(x)=\frac{1}{x-2}$, (ii) $f(x)=\frac{2x}{x+2}$,
   (iii) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, (iv)$f(x)=\frac{2x}{(x+2)^2}$,
   (v) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+2)^2}$, (vi)$f(x)=\frac{2}{x^2-9}$,
   (vii) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+9}$, (viii)$f(x)=x+\frac{1}{x}$,
   (ix) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$, (x)$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+4}$,
   (xi) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$, (xii) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+4}$ 。

6. 試證(4.6)及(4.7) 。

7. 試證(4.9) 。

8. 試證(4.11) 。

9. 試證對$\forall x \in R, \lim_{m\to\infty}(\cos(x\pi))^{2m}$,存在, 且極限值$=1$,若$x$爲整數,$=0$,若$x$不爲整數 。

10. 試證對$\forall x \in R$, $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!x\pi))^{2m})$ 存在,且極限值$=1$,若x爲有理數,$=0$,若x爲無理數 。

11. 設

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{若}x\text{爲有理數}, \\ x, & \text{若}x\text{爲無理數}\text{ 。} \end{cases}$$

試證$\lim_{x\to 1} f(x)=1$ 。

12. 設

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \text{若}x^{-1}\text{爲整數}, \\ 1-x, & \text{若}x^{-1}\text{不爲整數}\text{ 。} \end{cases}$$

試證$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ 。

13. 試證 (i) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}\neq 3$, (ii) $\lim_{x\to 2}(x+3)(x^2+1)\neq 1$ 。