第一章

極限

1.3 歐拉數及圓周率

我們先考慮數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 其中

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

並證明其極限存在 。此爲定理1.1“單調且有界之數列必收斂”之一很好的應用例子 。

首先, 顯然$\{a_n, n \geq 1\}$ 爲漸增 。其次

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 3, \end{aligned}$$

即$\{a_n, n \geq 1\}$以3爲一上界 。故$\{a_n, n \geq 1\}$ 收斂至一實數 。由於此極限值與π一樣在許多數學的公式中出現, 所以不可避免的需要給它一個特別的符號 。大數學家歐拉(Euler, 1707-1783)似乎是第

一個體會到此數之重要性的數學家, 並以e來表示。後來e就被廣爲採用, 也被稱爲歐拉數。e與π 被認爲是數學中最重要的兩個超越數。由於e爲$n \to \infty$時a_n之極限, 故e可表示爲

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \text{。} \tag{3.1}$$

底下說明如何以a_n求e之近似值, 事實上a_n收斂至e的速度極快。仍藉助一幾何級數, 對任意$n > m$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_m + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq a_m + \frac{1}{(m+1)!}(1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+1)^{n-m}}) \\ &\leq a_m + \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-1/(m+1)} \\ &= a_m + \frac{1}{m \cdot m!} \text{。} \end{aligned}$$

故對$n > m$,

$$a_m < a_n \leq a_m + \frac{1}{m \cdot m!} \text{。} \tag{3.2}$$

若令$n \to \infty$, 則上式導致

$$a_m < e \leq a_m + \frac{1}{m \cdot m!}, \forall m \geq 1 \text{。} \tag{3.3}$$

即對$\forall m \geq 1, a_m$ 與e 之差最多爲$\frac{1}{m \cdot m!}$。由於$m!$隨著m成長速度極快, 故a_m 爲e 之一很好的估計值。例如, 若$m = 10$, 則a_{10}與e之差小於10^{-7}, 因此經由計算a_{10}, 得到$e = 2.718281\cdots$。當然若m取大一些便可再更精確些, 如$e = 2.71828182845904523536028\cdots$。這是歐拉用筆算得到$e$的小數前23位。

e是超越數的證明(Hermite 在西元1873 年證出)超出這裡的範圍, 不過e是無理數的證明(這是歐拉所證出), 可利用前述(3.3) 對e的估計式。設$e = p/m$爲一有理數, 其中m, p爲二互質正整數。又易見$m \geq 2$, 此因e介於2與3之間, 故e不可能爲整數。現由(3.3)式知

$$a_m < \frac{p}{m} \leq a_m + \frac{1}{m \cdot m!} \text{。}$$

上式每項各乘以$m!$得

$$m!a_m < p(m-1)! \leq m!a_m + \frac{1}{m} < m!a_m + 1 \text{。}$$

而由a_m之定義知$m!a_m$爲一整數, 如此則得整數$p(m-1)!$介於兩相鄰整數$m!a_m$ 及$m!a_m+1$ 間之矛盾結果。故e非爲有理數。

註.$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, 其中$n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$爲實數, 稱爲一代數方程式。代數方程式的根稱爲代數數(algebraic numbers), 不是代數的根稱爲超越數(transcendental numbers)。

其次我們來看另一種常見的引進e的方法。考慮數列

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^n,\ n \geq 1 \text{。}$$

則由二項式定理可得

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= a_n < 3 \text{。}
\end{aligned}$$

又由上面第三個等號之右側可看出b_n的每一項對n漸增, 且b_{n+1}比b_n多一正的項, 故$\{b_n, n \geq 1\}$ 爲一漸增且有界之數列。故得證$\lim_{n\to\infty} b_n = b$存在。

接著證明$b = e$。對$l > n$, 仍由前述第三個等號之右側可得

$$b_l > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{l}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{l})\cdots(1-\frac{n-1}{l}) \text{。}$$

若先固定n, 而令$l \to \infty$, 則上式左側趨近至b, 而右側趨近至a_n。即此時有$b \geq a_n$, 而又有$b_n \leq a_n$, 因此

$$b \geq a_n \geq b_n \,, \forall n \geq 1 \text{ 。}$$

令$n \to \infty$, 由夾擠定理便得$b = \lim_{n\to\infty} a_n = e$。

我們發現e這個奇妙的數居然可用兩種完全不同的方式來導出, 以後我們會再說明尚有其他方式。不過我們再給兩個證明數列$\{b_n, n \geq 1\}$之極限存在的方法, 與上述常見的證法不同, 但亦頗值得一學。

第一個方法要再度用到Bernoulli不等式, 即對每一整數$n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall x > -1 \text{ 。}$$

首先由底下的推導便得$\{b_n, n \geq 1\}$爲漸增。

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\
&= \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\
&\geq \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1 \text{ 。}
\end{aligned}$$

其次對$\forall n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{b_{2n}}} = (\frac{2n}{2n+1})^n = (1 - \frac{1}{2n+1})^n \geq 1 - \frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} \text{ 。}$$

故$b_{2n} < 4, \forall n \geq 1$, 因此(注意已證出$\{b_n, n \geq 1\}$爲漸增) $b_n < 4, \forall n \geq 1$。即得證$\lim_{n\to\infty} b_n$存在。

第二個方法要用到算術平均大於幾何平均。令x及y爲二相異正數, 且考慮在$n+1$個數中有1個x及n個y, 則

$$(xy^n)^{1/(n+1)} < \frac{x+ny}{n+1} 。 \tag{3.4}$$

若取$x=1, y=1+1/n$, 則上式成爲

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1},$$

亦即$b_n < b_{n+1}$。而若取$y=1+1/(2n), x=1/y^n$, 則(3.4)式成爲

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{(1+\frac{1}{2n})^{-n}+n(1+\frac{1}{2n})}{n+1} \\ &= \frac{1+n(1+\frac{1}{2n})^{n+1}}{(n+1)(1+\frac{1}{2n})^n} 。\end{aligned}$$

由上式又立即解出

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 2 。$$

即$b_{2n} < 4, \forall n \geq 1$, 且再度得證$\{b_n, n \geq 1\}$收斂。

接著我們看圓周率π。

自小學起, 我們就知道單位圓之面積爲π, 而半徑若是r, 則圓面積爲πr^2, 圓周長則爲$2\pi r$, π便稱爲圓周率。我們一直將此事視爲當然, 至於π值究竟是多少? 3.14 或3.14159等均爲常給的近似值。但若我們想要更精確的π 值, 以往可能就較不常提到該如何做了。事實上, 追溯到阿基米德(Archimedes, 西元前287-212年)的時代及中國三國時代的劉徽(大約西元260 年), 就已經知道如何用一套能計算π精確至任意位數的方法。值得一提的是, 南北朝時代的祖沖之(429-500), 算出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927 。$$

他並建議用分數$355/113 \doteq 3.14159292$ 做爲π的近似值, 並把它稱做密率。他把π的另一近似值$22/7 \doteq 3.14$稱爲約率。在分母小

於16717的分數中，沒有比355/113更接近π了。我們並不知祖沖之是怎麼算出來的，因爲要用到底下所述的24576邊的正多邊形才能得到此精確度，而那可是要花相當長的時間。

阿基米德以單位圓的內接正n多邊形的面積(以A_n表之)來逼近圓面積。則因每一小扇形的面積爲$\frac{1}{2}\sin(2\pi/n)$，故

$$A_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\,, \tag{3.5}$$
$$A_{2n} = \frac{2n}{2}\sin\frac{2\pi}{2n}\text{。}$$

再利用三角函數的公式，只要$0 < x \le \pi/2$，

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\,,$$
$$\sin x = \sqrt{(1-\cos 2x)/2}\,,$$

得

$$A_{2n} = \frac{n}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-(2A_n/n)^2}}\text{。} \tag{3.6}$$

現考慮數列$\{A_{2^n}, n \ge 2\}$，即邊數依序爲$2^2, 2^3, 2^4, \cdots$。也就是這些內接正多邊形的頂點，爲不斷地取圓弧中點而得。由幾何中的結果立即看出$\{A_{2^n}, n \ge 2\}$形成一漸增且有界的數列，故其極限存在。底下我們證明此極限即爲圓面積，亦即

$$\pi = \lim_{n\to\infty} A_{2^n}\text{。} \tag{3.7}$$

先作圓之外切正2^n多邊形，其面積以B_{2^n}表之。

B　D

O　　　　　A　　C

圖3.1.

則因$OD/OC = \cos(\pi/2^n)$，故

$$\frac{A_{2^n}}{B_{2^n}} = (\cos\frac{\pi}{2^n})^2\text{。} \tag{3.8}$$

不難看出$\{B_{2^n}, n \ge 1\}$形成一單調且有界之數列，故$\lim_{n\to\infty} B_{2^n}$存在。而$A_{2^n} < \pi < B_{2^n}$，且$\lim_{n\to\infty}\cos^2(\pi/2^n) = 1$(見習題第1題)，故由夾擠定理得證(3.7)式。

(3.7)式提供一求π之近似值的步驟, 由$A_4 = 2$出發, 依序可求出$A_8, A_{16}, \cdots$ 。至於此法之精確性如何? 由(3.8)式得

$$(3.9)\ A_{2^n} < \pi < B_{2^n} = \frac{A_{2^n}}{(\cos\pi/2^n)^2} = \frac{2A_{2^n}}{1+\sqrt{1-(A_{2^n}/2^{n-1})^2}} \text{ 。}$$

例如, 因$A_8 = 2\sqrt{2}$, 故

$$2\sqrt{2} < \pi < \frac{4\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} \text{ 。}$$

另外, 亦可由單位圓之內接正多邊形的周長來逼近圓周長, 如此亦可得到π之一逼近法 。即若以C_n表內接正n多邊形的邊長, 則先導出下述關係(見習題第2題)

$$(3.10) \qquad C_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-C_n^2}} \text{ 。}$$

再利用$C_4 = \sqrt{2}$, 依序可得

$$C_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, C_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$C_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \cdots \text{ 。}$$

一般則有

$$(3.11) \qquad C_{2^n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}},$$

其中有$n-1$個$\sqrt{\ }$, 且內接正2^n多邊形的周長(形成一漸增且有界之數列)之極限存在 。仿上再導出外切正2^n多邊形之周長, 利用夾擠定理即得

$$(3.12) \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}} = \pi,$$

其中有$n-1$ 個$\sqrt{\ }$ 。

上述兩種方式對於求π之值都是要不斷地開方, 在那缺乏計算機的時代, 實在是一件很辛苦的事 。等我們學了積分, 將有其他更有

效的方法來算π值。不過這種將面積以小塊可求的面積和來逼近,就形成積分概念的基礎。不但如此, 在阿基米德時代, 雖然他們已能算出不少圖形的面積或立體的體積, 但每一情形的突破, 雖在當時已覺是一大成就, 充其量卻也只是一個個案。積分學的威力就是有一套辦法來求面積及體積, 仿如郭靖得洪七公指點後, 不論遇敵爲何, 只要將降龍十八掌使一遍, 就可卻敵。

習 題 1.3

1. 試證$\lim_{n\to\infty}\cos^2(\pi/2^n)=1$。

2. 試證(3.10)式。

3. 試求下述極限值

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}\text{。}$$

4. 求A_{2n}與C_n之關係, 並用此比較藉由A_n或C_n來逼近圓周率, 何者較佳?

5. 令D_n表單位圓之外切正n多邊形之邊長。求B_n與D_n 之關係。

6. 試證A_{2n}爲A_n 與B_n之幾何平均。