第一章

極限

1.2 極限的基本性質

設有一數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 則當$n \to \infty$ 時, 此數列不能有二個極限存在 。直觀上此結果是對的 。因設有二極限a, a' 存在, 且$a \neq a'$, 我們可取小一點的正數ε , 使得$I_1 = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 與$I_2 = (a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ 不重疊 。則除了有限項之外, 所有的a_n要落在I_1中, 也要落在I_2中, 而此乃不可能 。另外, 若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在, 則此數列爲有界 。直觀上也是對的 。因除了有限項, 譬如説$a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$, 其餘的$a_n$皆落在$(a-1, a+1)$中(即取$\varepsilon = 1$) 。所以可找到一有限區間包含所有$a_n$ 。我們將此結果陳述如下, 並將以上的想法明確地寫出 。

定理2.1. 設數列$\{a_n, n \geq 1\}$ 之極限存在, 則

(i) 極限值唯一;

(ii) 此數列有界 。

證明. 令$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$ 。

(i) 設存在另一實數$a' \neq a$, 也滿足$\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ 。取$\varepsilon = |a - a'|/2$ 。則依極限的定義知, 存在$n_1, n_2 \geq 1$, 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon\,, \forall n \geq n_1\,,$$

$$|a_n - a'| < \varepsilon\,, \forall n \geq n_2\ 。$$

故當$n \geq \max\{n_1, n_2\}$時, 由三角不等式

$$|a - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|\,,$$

此乃不可能 。故得證極限值唯一 。

(ii)取$\varepsilon = 1$, 則存在$n_0 \geq 1$, 使得$|a_n - a| < 1, \forall n \geq n_0$ 。即$n \geq n_0$時, $|a_n| \leq |a| + 1$ 。令

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}\,,$$

則$|a_n| \leq K, \forall n \geq 1$ 。得證此數列有界 。

由於極限值必唯一, 故在極限值存在的情況下, 不論此數列前面的項數變化多大, 逐漸地它們只會在某一定值附近略微波動且波動會越來越小, 此即數列趨近穩定(stationary) 。這也可以說明爲何若極限值存在, 我們便說此數列收斂, 因最終此數列的值是可以掌握的 。而發散的數列, 要嘛它們的值會一直跳躍, 停不下來, 要嘛它們的值會無止盡的變大(或無止盡的變小), 也是停不下來 。在日常用語, 一位父親要他的小孩收斂一點, 也有類似的意思 。即要求小孩的行爲要能被掌控, 而不能發散 。

底下的定理是關於極限的四則運算 。

定理2.2.設有二數列$\{a_n, n \geq 1\}$及$\{b_n, n \geq 1\}$, 且$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ 皆存在 。則

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$, 若$b \neq 0$ 。

證明.我們只證(iii)及(iv), (i)及(ii)之證明留在習題 。

(iii)$\forall \varepsilon > 0$, 依定義可找到$n_0 \geq 1$, 使得$n \geq n_0$時,

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ 且 } |b_n - b| < \varepsilon\ 。$$

則因$a_nb_n - ab = b_n(a_n - a) + a(b_n - b)$, 故由三角不等式

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &< (|a| + |b_n|)\varepsilon \leq (|a| + K)\varepsilon, \end{aligned}$$

此處由定理2.1 知, $\{b_n, n \geq 1\}$ 爲一有界數列, 故可設$|b_n| \leq K, \forall n \geq 1$, 其中$K > 0$ 爲某一定值。

底下的步驟是在證明極限的過程中常用的技巧。對任給一$\varepsilon > 0$, 我們先取$\varepsilon_1 = \varepsilon/(|a| + K)$, 則依上述推導, 可找到一$n_0' \geq 1$, 使得$n \geq n_0'$時,

$$|a_nb_n - ab| < (|a| + K)\varepsilon_1 = \varepsilon \text{ 。}$$

故得證(iii)。

(iv) 我們須證明$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon \,, \forall n \geq n_0 \text{ 。} \tag{2.1}$$

而仿(iii), 利用三角不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_nb - ab_n}{b_nb}\right| \leq \frac{|b||a_n - a|}{|b_nb|} + \frac{|a||b_n - b|}{|b_nb|} \\ &= \frac{1}{|b_n|}|a_n - a| + \frac{|a|}{|b_n||b|}|b_n - b| \text{ 。} \end{aligned}$$

由上述不等式我們知道應可證出了, 因n夠大後, $|a_n - a|$及$|b_n - b|$皆會很小。但仍有一些細節, $1/|b_n|$會不會很大? 甚至$|b_n| = 0$怎麼辦? 不過這些是可解決的。

因$\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, 故存在一$n_1 \geq 1$, 使得$n \geq n_1$時, $|b_n - b| < |b|/3$ (即取$\varepsilon = |b|/3$)。而$|b| - |b_n| < |b_n - b|$(此亦爲三角不等式), 故得$n \geq n_1$時, $|b_n| > 2|b|/3 > 0$。所以我們只考慮$n \geq n_1$, 因最後要令$n \to \infty$, 故一開始就限制$n \geq n_1$, 當然是可以的。

底下要做的工作就是讓(2.1)式成立而已。$\forall \varepsilon > 0$, 先找到一$n_2 \geq 1$, 使得

$$|a_n - a| < \frac{|b|}{3}\varepsilon \,, |b_n - b| < \frac{|b|^2}{3(|a| + 1)}\varepsilon \,, \forall n \geq n_2 \text{ 。}$$

再取$n_0=\max\{n_1,n_2\}$。則$n\geq n_0$時, 因

$$\frac{1}{|b_n|}<\frac{3}{2|b|},$$

故由(2.2),

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| &\leq \frac{3}{2|b|}\frac{|b|}{3}\varepsilon+\frac{3|a|}{2|b|^2}\frac{|b|^2}{3(|a|+1)}\varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{。}\end{aligned}$$

此處在給$|b_n-b|$的上界時, 因a有可能爲0, 故分母取爲$3(|a|+1)$。得證。

底下的推論也是很顯然的, 因只要在上定理中取$b_n=\alpha, \forall n\geq 1$, 即可。

系理2.1.設$\lim_{n\to\infty}a_n=a$存在。則對$\forall$常數α,

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n+\alpha)=a+\alpha$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha a$。

定理2.3.若$\lim_{n\to\infty}a_n=a, \lim_{n\to\infty}b_n=b$, 且$a_n\leq b_n, \forall n\geq 1$, 則$a\leq b$。

證明.設$a>b$, 我們想導出矛盾。取$\varepsilon=(a-b)/2>0$。由假設知存在一$n_0\geq 1$, 使得$n\geq n_0$時, $|a_n-a|<\varepsilon$且$|b_n-b|<\varepsilon$。故$n\geq n_0$時,

$$b_n<b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=a-\frac{a-b}{2}=a-\varepsilon<a_n,$$

此與假設$a_n\leq b_n, \forall n\geq 1$, 不合。故$a\leq b$。

其次我們看著名的夾擠原理(Squeezing Principle), 又稱夾擠定理或三明治定理(Sandwich Rule)。此定理對求極限常有很大幫助。

定理2.4.設有三數列$\{a_n, n \geq 1\}, \{b_n, n \geq 1\}$ 及$\{c_n, n \geq 1\}$, $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq 1$, 且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 則$\lim_{n\to\infty} b_n = a$。

證明.由假設知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon\,, |c_n - a| < \varepsilon\,, \forall n \geq n_0 \text{ 。}$$

即

$$a - \varepsilon < a_n\,, c_n < a + \varepsilon\,, \forall n \geq n_0 \text{ 。}$$

因$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq 1$, 故$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon, \forall n \geq n_0$, 亦成立。得證。

底下的推論之證明留在習題。

系理2.2.設$\{a_n, n \geq 1\}$ 爲一有界數列, 且$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 則

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \text{ 。}$$

例2.1.求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 4n}{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} \text{ 。}$$

證明.首先將分子分母同除以n^3, 得

$$\frac{2n^3 + n^2 + 4n}{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} = \frac{2 + n^{-1} + 4n^{-2}}{1 + 3n^{-1} + 2n^{-2} + n^{-3}} \text{ 。}$$

由例1.7知$n \to \infty$時, n^{-1}, n^{-2}, n^{-3} 皆趨近至0。再利用定理2.2, 便得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 4n}{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} = \frac{2 + 0 + 0}{1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0} = 2 \text{ 。}$$

例2.2.設$|x| < 1$, 我們想證明

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \text{ 。}$$

證明. 若$x=0$ 上式當然成立。其次設$0<x<1$, 且令$a>0$, 滿足

$$x=\frac{1}{1+a}\text{ 。}$$

再利用對$\forall n\geq 1$, 及$a>0$,

$$(1+a)^n\geq 1+na\,,$$

得當$n\to\infty$時,

$$x^n=\frac{1}{(1+a)^n}\leq\frac{1}{1+na}=\frac{n^{-1}}{n^{-1}+a}\longrightarrow\frac{0}{0+a}=0\text{ 。}$$

至於若$-1<x<0$, 則$0<|x|<1$, 而已證出$\lim_{n\to\infty}|x|^n=0$, 故$\lim_{n\to\infty}x^n=0$ (見習題)。

註. 對$\forall x>-1$及整數$n\geq 1$, $(1+x)^n\geq 1+nx$, 此爲Bernoulli 不等式(Bernoulli inequality)之一特別情況, 可以歸納法證明。

例2.3. 求$n\to\infty$時, $\sqrt[n]{n}$之極限值。
證明. 因$n\geq 1$, 而任何一大於或等於1的數, 開n次方後仍大於或等於1。故

$$\sqrt[n]{n}\geq 1\text{ 。}$$

再利用算術平均(arithmetic mean)大於幾何平均(geometric mean),

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n}&=(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot 1\cdots 1)^{1/n}\\&\leq\frac{1}{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+1+\cdots+1)\\&=\frac{1}{n}(2\sqrt{n}+n-2)=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n},\end{aligned}$$

其中$1\cdot 1\cdots 1$共有$(n-2)$個1。因此我們即得

$$1\leq\sqrt[n]{n}\leq\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}\text{ 。}$$

最後利用夾擠定理, 因$n \to \infty$時, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 及$\frac{1}{n}$皆趨近至0, 故得證

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ 。}$$

另一常見的作法是利用二項式定理。令$a_n = \sqrt[n]{n}$, 因$a_n \geq 1$, 故$a_n = 1 + h_n$, 其中$h_n \geq 0$。則

$$\begin{aligned} n = a_n^n &= (1+h_n)^n \\ &\geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \text{ 。} \end{aligned}$$

故對$n \geq 2$, 有

$$h_n^2 \leq \frac{2}{n-1},$$

即

$$h_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \text{ 。}$$

因此

$$1 \leq a_n = 1 + h_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \text{ 。}$$

而仿例1.7之(i)的證明, 可得上式右側趨近至1。故由夾擠定理得證$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$。

我們看到適當地利用一些定理, 在求極限時可不須由定義出發。

註. 對任意$n \geq 1$及$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

且等號成立若且唯若$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。此即算術平均大於幾何平均, 爲一重要的不等式。

註. 二項式定理(Binomial Theorem). 對$\forall n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

其中

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\ 。$$

至此, 我們對數列的極限做了一些基本的介紹。下一節我們將經由推導歐拉數及圓周率, 以使大家對極限再多一點練習。極限裡仍有一些題材, 如子數列、函數數列等, 我們以後會再討論。而等我們對三角函數及指數、對數更熟練後, 將可再求更多極限。

習 題 1.2

1. 試證定理2.2之(i)及(ii)。

2. 設$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 試證$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$。又問其逆成立否?

3. 設$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 試證$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

4. 試證系理2.2。

5. 設$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 試證存在一$n_0 \geq 1$, 使得$a_n > 0, \forall n \geq n_0$。

6. 設$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$,且$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$。試證

   (i) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$,

   (ii) $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = \infty$,

   (iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$。

7. 設有二多項式$f(x)$及$g(x)$, 則對$\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$可有何推論?

8. 設$a_1 = 1, a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}, n \geq 2$。試求$\lim_{n\to\infty} a_n$。

9. 設$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$。試求$\lim_{n\to\infty} a_n$。

10. 試證數列$\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \cdots$ 收斂,並求其極限值。

11. 試證數列$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 收斂, 並求其極限值。

12. 試求$\lim_{n\to\infty}(n^2+3n)/(n^3+2n^2+1)$。

13. 試求$\lim_{n\to\infty}(2n^3+4n^2+5)/(7n^2+n+6)$。

14. 試求$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+n^{-1}}$。

15. 試求$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$。

16. 仿例2.3的第二種作法, 試求$\lim_{n\to\infty} n/\alpha^n, \alpha > 1$。

17. 試證$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+1/2} = 1/2$。

18. 試證$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) = 0$。

19. 試證$\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$。

20. 試證$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n i/n^2 = 1/2$。

21. 試證$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (n+i)^{-2} = 0$。

22. 試證$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (n+i)^{-1/2} = \infty$。

23. 試證$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (n^2+i)^{-1/2} = 1$。

24. 試求$\lim_{n\to\infty} 10^n/n!$。

25. 試求$\lim_{n\to\infty}(1+(-1)^n)/n$。