第一章

極限

1.1 數列的極限

極限是微積分的基礎, 本章我們就來探討極限, 且從數列開始。數列的極限我們很早便已接觸到。在中學時代學到循環小數, 例如$0.\bar{3}$, 我們知道它剛好是$\frac{1}{3}$。亦即

$$0.\bar{3} = 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + 3 \cdot \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{3}, \tag{1.1}$$

這裡面其實就已用到極限。因前n項的等比級數的和爲

$$s_n = \frac{3}{10}\frac{1-(1/10)^n}{1-1/10}。$$

而我們又用到兩個性質, 第一個爲若讓n一直增大, 則"最後"s_n的值將與(1.1)中兩個等號中間那串數之和的"值"一樣; 第二個爲"最後"$(1/10)^n$之值爲0。因此

$$\frac{3}{10}\frac{1-0}{1-1/10} = \frac{3}{10}\frac{10}{9} = \frac{1}{3}。$$

所以我們很早就有處理極限的經驗, 即使當時對極限的概念未必十分清楚。

不過遺憾的是, 不少人在並不了解極限的意義之情況下, 便常輕率地使用 。例如, 小學五年級的數學課中, 有最小公倍數的題材, 在測驗卷中常可見到底下這類以選擇題出現的題目 。

(i)12的倍數有(1) 1個 (2) 12個 (3) 無限多個;

(ii)2, 4, 6的最大公倍數是(1) 12 (2) 2 (3) 無限大 。

不出所料, 兩題的“標準答案”皆爲(3) 。這種原本不該在小學裡出現的題目就是出現了 。希望各位現在已能分辨何者才是正確的 。

究竟該如何定義極限呢? 我們先看底下二例 。第一例爲考慮數列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots \text{ 。}$$

此數列愈來愈小, 極限值似乎是0才對 。不過在戰國時代名家公孫龍曾說(亦見莊子天下篇)“一尺之棰, 日取其半, 萬世不竭” 。萬世不竭是指每次都還剩一點, 但“最後”會怎麼樣就沒有說了 。

另外, 劉徽爲中國古代算書“九章算術”作注 。在割圓術處寫著“割之彌細, 所失彌少, 割之又割, 以至於不可割, 則與圓周合體而無所失矣” 。在這段話裡極限的概念躍然欲出, 較公孫龍時代已是進步許多 。

有一些數列我們由觀察法便可看出其極限值 。前述$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$爲一例 。另外, 設有數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 且$a_n = 1/n$, 即有

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \text{ 。}$$

當n愈大, 此數列愈接近0 。我們可更進一步說明如下: 令$a_n = 1/n$, 任給一正數ε, 只要$n > 1/\varepsilon$, 則$0 < a_n = 1/n < \varepsilon$ 。故自第$[1/\varepsilon]+1$項起, 其中$[\cdot]$爲最大整數函數, a_n的值皆小於ε 。又由於$\{a_n, n \geq 1\}$爲漸減, 所以不論給任何一正數ε, 只要n夠大便有$0 < a_n < \varepsilon$ 。而一非負的數, 若小於任一正數, 此數必爲0, 故a_n之極限值爲0 。我們可採用下述記號

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

或說n趨近至∞時(記爲$n \to \infty$), 數列$\{a_n, n \geq 1\}$ 收斂到0(converges to zero), 記爲$a_n \to 0$ 。

上述數列之每一項皆爲正, 但若讓n一直增加, 以符號來表示, 即令$n \to \infty$, 則第n項會愈來愈接近0。我們看到一數列之正數, 其極限值卻爲0。在極限裡常有這一類的現象, 即原來每一項均滿足的條件, 其極限卻不滿足。另外, 如兩有理數之和爲一有理數, 三有理數之和仍爲一有理數, 任意n個有理數之和還是有理數。但無限多個有理數之和呢? 就不一定是有理數了。大家宜記住, 在極限裡任何事情均有可能發生。因此, 諸如"海枯石爛, 此情不渝", 便不可輕信。因海枯石爛表時間趨近至∞, 而此時會發生什麼事就已無法度量了。

前述數列之極限爲0有幾種寫法:

$$\text{當} n \to \infty \text{時}, a_n \to 0\,,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \tag{1.2}$$

其中lim爲limit之縮寫。我們略微解釋上式的意義。若我們依序觀察a_n, 則a_n愈來愈小, 在第100項之後的每一項皆小於1/100, 在第1,000項之後的每一項皆小於$1/1,000$, 餘類推。雖然沒有一項a_n是0, 但若我們觀察得夠久, 顯然之後的每一項a_n與0的差距可以小至我們所滿意。

不過這種解釋可能仍不盡令人滿意。何謂夠久? 多小才算我們所滿意? 若我們能對這兩件事給出明確的意義, 便能對(1.2)式給出數學上明確的說明。

我們試著以幾何來解釋, 看能不能較清楚些。在數線上表示出此數列, 並選取區間$I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, 以0爲其中心。若$\varepsilon = 2$, 顯然所有的$a_n$皆落在$I_\varepsilon$中; 若$\varepsilon = 1/10$, 則首10項不落在$I_\varepsilon$中, 而自第11項起皆落在$I_\varepsilon$中。再讓$\varepsilon$更小些, 譬如說$\varepsilon = 1/1,000$, 則自第1,001項起, a_n 也皆落在I_ε中。明顯地, 不論ε取得多小, 只要$\varepsilon > 0$, 必可找到一最小的正數n_0, 滿足$1/n_0 < \varepsilon$, 則只有前面有限項$a_1, \cdots, a_{n_0-1}$, 不落在I_ε中, 而自第n_0項起(即$n \geq n_0$), a_n 皆落在I_ε中。

利用上例之想法, 我們可對一般的“數列$\{a_n, n \geq 1\}$之極限爲a”給一較明確之定義。怎樣才是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\ ? \tag{1.3}$$

當n很大時, a_n與a的差距將很小, 即$|a_n - a|$要很小, 要多小才算小呢? 可以給一$\varepsilon > 0$當做$|a_n - a|$之上界, 而因並非所有$|a_n - a|$皆須很小, 只要n很大時$|a_n - a|$很小即可。換句話說, 只要可以找到一個n_0, 使得$n \geq n_0$時, $|a_n - a| < \varepsilon$就夠了。若覺得此ε不夠小, 可以再換一個。最後, 若不論給那一個$\varepsilon > 0$, 皆可辦到能找到一n_0(此n_0可與ε有關, 即對不同的ε可找到不同的n_0), 使得$n \geq n_0$時(即n夠大), $|a_n - a| < \varepsilon$,則我們便同意(1.3)成立。

我們倒不是說n很大時, a_n要等於a, 即$a_n - a = 0$, 而是說$|a_n - a|$須小於任意一正數, 只要n夠大。而$|a_n - a| \geq 0$當然永遠成立, 但一非負的數要能小於任意一正數,就只有0了。所以說此時(1.3)成立。

任給一$\varepsilon > 0$, 要說(1.3)成立, 就須找到一個n_0, 使得$n \geq n_0$時

$$|a_n - a| < \varepsilon\,,$$

即$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。如果$\varepsilon$給得愈小, 通常$n_0$便要愈大才行。但若一直可以辦到, 就不得不接受(1.3)的結果了。我們將上述想法寫成一定義如下。

定義1.1.設有一數列$\{a_n, n \geq 1\}$。對一$a \in R$, 若$\forall \varepsilon > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得$n \geq n_0$時, $|a_n - a| < \varepsilon$, 則稱$\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

不少初學者對定義1.1並不容易接受, 在邏輯上, 這是一個不算容易的命題。此因其中包含四個敘述: (1) $\forall \varepsilon > 0$, (2) 存在一$n_0 \geq 1$, (3) 使得$n \geq n_0$時, (4) $|a_n - a| < \varepsilon$。要弄清其中的因果關係, 是要經過一段時間的。我們的目的是要讓$|a_n - a| < \varepsilon$, 在什麼情況下? 只要$n \geq n_0$即可, 對前面的$a_1, \cdots, a_{n_0-1}$可以不用理會。而n_0又是什麼? 只要找到一個即可, 是可以隨著所給的ε而不同的。我們陸

續會證明一些定理, 用那些定理可以幫助我們較快速地求出不少極限值。但是定義1.1是最根本的, 當無現成定理可套用, 而欲求一數列之極限, 還是得按部就班地依定義行事。當然在運用定義1.1時, 必須先知道或猜出極限值b。我們看底下的另二例。

例1.1.設$a_n = n/(n+1), n \geq 1$,我們證明$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$。欲使

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon\,, \tag{1.4}$$

即要$n+1 > 1/\varepsilon$, 或$n > 1/\varepsilon - 1$。如果$\varepsilon \geq 1$則$1/\varepsilon - 1 \leq 0$, 故此時$\forall n \geq 1$皆可使(1.4)成立; 若$0 < \varepsilon < 1$, 則取$n_0 = [1/\varepsilon]$即可, 其中$[\,\cdot\,]$爲最大整數函數。在定義1.1中的n_0 並不唯一, 可看出若找到一n_0適用, 則每一比n_0大的整數亦皆適用。所以若不管ε爲何, 皆取$n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ 自然可以, 或取$n_0 = [1/\varepsilon] + 10$也無妨。

例1.2.設$a_n = (2n^2+3)/(n^2+2n), n \geq 1$, 底下我們證明$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$。欲使

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left|\frac{2n^2+3}{n^2+2n} - 2\right| = \left|\frac{4n-3}{n^2+2n}\right| \\ &< \frac{4n}{n^2+2n} = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

只要$n > 4/\varepsilon$即可, 即取$n_0 = [4/\varepsilon] + 1$。

對一數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 若存在一$a \in R$, 使得$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,則我們說$\{a_n, n \geq 1\}$收斂(convergent), 或說$\{a_n, n \geq 1\}$ 收斂到a, 否則稱爲發散(divergent)。立即可看出若$\{a_n, n \geq 1\}$收斂至$a \in R$, 則$\{a_n, n \geq 2\}$亦收斂至a, 甚至去掉前面有限項, 如考慮$\{a_n, n \geq k\}$, 其中k爲一固定正整數, 仍收斂至a。一數列的收斂與否, 重要的是其尾部(tail),而非前面有限項。

在此我們要對有限及無限再加以說明。自然數的集合並無上界, 即自然數可以任意大, 但給定一自然數, 它一定是有限, 只有

一個有限的數, 當然也就有界。有限個有限的數之集合, 也是有界。但無限多個有限的數之集合就不一定有界了。所以若$a_n = n$, 則$\{a_n, n \geq 1\}$爲一有限數列, 因每一a_n皆爲一有限值。不過顯然$\{a_n, n \geq 1\}$並非一有界數列(即不存在一常數$K > 0$, 使得$|a_n| \leq K, \forall n \geq 1$)。隨著$n$之增大, a_n也一直增大, 陸續超過每一正數, 這就是稍後我們會討論的$n \to \infty$時, $a_n \to \infty$, 即$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$。由於$\infty$並非一實數,故此時仍説極限不存在。

至於$\lim_{n\to\infty} a_n$不存在又是什麼意思? 也就是我們要能展示$\forall a \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a\text{。} \tag{1.5}$$

而上式即$\lim_{n\to\infty} a_n = a$不成立, 即要推翻

(1.6) $\forall \varepsilon > 0$, 存在一 $n_0 \geq 1$, 使得 $n \geq n_0$時, $|a_n - a| < \varepsilon$。

我們依序來看: 要説$\forall \varepsilon > 0, \cdots$不成立,只要找到一$\varepsilon > 0$ 使得$\cdots$不成立即可。在此$\cdots$即(1.6)之後三個敘述。而欲使存在一$n_0 \geq 1$, $\triangle\triangle$不成立, 便須對$\forall n_0 \geq 1$, $\triangle\triangle$不成立, 在此$\triangle\triangle$即(1.6)之後二敘述。最後欲$n \geq n_0$時, $|a_n - a| < \varepsilon$, 不成立, 便只要找到一$n \geq n_0$, 使得$|a_n - a| \geq \varepsilon$。總結如下: 對一$a \in R$, 若存在一$\varepsilon > 0$, 使得對$\forall n_0 \geq 1$, 必存在一$n \geq n_0$, 使$|a_n - a| \geq \varepsilon$, 則(1.5)成立。而若$\forall a \in R$, 皆能辦到此事, 則$\lim_{n\to\infty} a_n$便不存在, 或説$n \to \infty$時, a_n之極限不存在, 即$\{a_n, n \geq 1\}$ 發散。

例1.3.試證$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$不存在。

證明.令$a_n = (-1)^n$。要證明$\forall a \in R, \lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq a$。先設$a \geq 0$。取$\varepsilon = 1/2$, 則當$n$爲奇數時,

$$|a_n - a| = |-1 - a| = a + 1 > \varepsilon,$$

即$\forall n_0 \geq 1$, 必存在一奇數$n \geq n_0$, 使得$|a_n - a| \geq \varepsilon$。

其次設$a < 0$。仍取$\varepsilon = 1/2$, 則當n爲偶數時,

$$|a_n - a| = |1 - a| = 1 - a > \varepsilon,$$

即仍有$\forall n_0 \geq 1$, 存在一偶數$n \geq n_0$, 使得$|a_n - a| \geq \varepsilon$。得證。

底下我們給單調數列的定義。設有數列$\{a_n, n \geq 1\}$。若$a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq 1$, 則$\{a_n, n \geq 1\}$稱爲漸增; 若$a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$, 則$\{a_n, n \geq 1\}$ 稱爲漸減。漸增及漸減數列統稱單調數列。而若$a_{n+1} > a_n$, $\forall n \geq 1$, 則$\{a_n\}$稱爲嚴格漸增。同理可定義嚴格漸減, 及嚴格單調數列。函數的單調也有類似的定義, 我們就不寫出來了。

在極限中一很基本的結果爲單調且有界的數列必收斂,見下定理。

定理1.1.設數列$\{a_n, n \geq 1\}$爲單調且有界, 則$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

證明.假設$\{a_n, n \geq 1\}$爲漸增, 且設$|a_n| \leq K, \forall n \geq 1$, 其中$K$ 爲一固定的正數。因$\{a_n, n \geq 1\}$數列值之集合$S = \{a_1, a_2, \cdots\}$有上界, 故由實數系之最小上界公理(見底下註1.1)知, 此集合有最小上界存在。我們以L表此最小上界。而$a_n \leq L, \forall n \geq 1$, 仍成立。我們要證明$L$即爲$\lim_{n\to\infty} a_n$。

對任一$\varepsilon > 0$, 因$L - \varepsilon$並非S之一上界, 故必存在一$n_0 \geq 1$, 使得$L - \varepsilon < a_{n_0}$ (當然n_0可能與ε有關)。則對$\forall n \geq n_0$, 因$a_n \geq a_{n_0}$, 故$L - \varepsilon < a_n \leq L$。亦即$\forall \varepsilon > 0$, 可找到一$n_0 \geq 1$, 使得

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \text{。}$$

而上式與$|L - a_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, 等價(在此$L - a_n$必不爲負), 故依定義$L = \lim_{n\to\infty} a_n$。

至於$\{a_n, n \geq 1\}$爲漸減的情況亦同理可證。

註.(最小上界公理). 設B爲實數之一非空且有上界之子集合, 則B有最小上界(least upper bound, 縮寫爲lub)。

在此設B爲實數之一非空子集合。若K滿足$x \leq K$, $\forall x \in B$, 且若$k_1 < K$, 則必有一$l \in B$, 使得$l > k_1$, 則稱K爲B之最小上界。類似地, 也可定義最大下界(greatest lower bound, 縮寫爲glb)。

對一數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 我們再給$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 及$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 之定義。

定義1.2.若$\forall k > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得$n \geq n_0$時, $a_n > k$, 則以$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 表之; 若$\forall k > 0$, 存在一$n_0 \geq 1$, 使得$n \geq n_0$ 時, $a_n < -k$, 則以$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 表之。

若$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, 則我們說$n \to \infty$時, a_n發散到∞, 或說極限爲∞。再強調一次, 此時極限並不存在。$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$也可類似地說明。又通常我們寫$\lim_{n\to\infty} a_n = a$時, 即隱含$a$爲一實數。底下有兩個定理1.1 之立即的推論。

系理1.1.設存在一$n_0 \geq 1$, 使得數列$\{a_n, n \geq 1\}$自第n_0項起爲單調, 且此數列爲有界, 則$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

系理1.2.設數列$\{a_n, n \geq 1\}$爲單調而不爲有界。若此數列爲漸增, 則$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; 若此數列爲漸減, 則$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$。

例1.4.設$a_n = 10^n/n!, n \geq 1$。可檢驗此數列在前10項爲漸增, 自第11項開始漸減。又$a_n \geq 0, \forall n \geq 1$, 因此$\{a_n, n \geq 1\}$ 爲有界。故由系理1.1知, $\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

例1.5.設$a_n = n^2 + (-1)^n, n \geq 1$。因$\{a_n, n \geq 1\}$爲漸增而不爲有界, 故$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$。

例1.6.設$a_n = (n^2+1)/n$, 我們想證明$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$。

首先欲

$$a_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > k\,,$$

只要$n > k$即可。即$\forall k > 0$, 取$n_0 = [k]+1$, 則$n \geq n_0$時, $a_n > k$。故依定義知, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$。另外, 因數列$\{a_n, n \geq 1\}$爲漸增, 故亦

可利用系理1.2, 而得到同樣的結果 。

例1.7.試證

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\,,\alpha>0\,;$

(ii) $\lim_{n\to\infty}n^\beta=\infty\,,\beta>0$ 。

證明.我們只證(i) 。$\forall\varepsilon>0$ 欲使

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon\,,$$

只要$n>(1/\varepsilon)^{1/\alpha}$即可 。故可取$n_0=[(1/\varepsilon)^{1/\alpha}]+1$ 。

對一數列$\{a_n,n\geq 1\}$, 所謂"取極限", 就是決定$\lim_{n\to\infty}a_n$ 。取極限也就成爲一種運算 。如果有另一數列$\{b_n,n\geq 1\}$, 我們可能會問

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n \tag{1.7}$$

是否成立? 左側是先相加再取極限, 右側是先取極限再相加, 二者的意義不相同 。在數學上一般而言, 若將二運算的次序交換, 所得的結果並不一定相等 。例如, 除了少數特例,

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}\text{ 。}$$

換句話說, 開方與相加二運算不可交換 。但在適當的條件下, (1.7)是成立的 。在下一節我們將給出極限的一些基本性質 。

習　題　1.1

1. 設$a_n=2n/(n-3),n\geq 4$ 。試依定義證明$\lim_{n\to\infty}a_n=2$ 。
2. 設$a_n=\sqrt{n}/(2+\sqrt{n}),n\geq 1$ 。試依定義證明$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 。
3. 設$a_n=(n^2+3)/(n+2),n\geq 1$ 。試依定義證明$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 。

4. 設$a_n = (n-2n^2)/(n^2+3), n \geq 1$。試依定義證明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

5. 設$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, n \geq 1$。試證$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

6. 設$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 1}, n \geq 1$。試證$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

7. 設$a_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-2}, n \geq 1$。試證$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

8. 設$a_n = \sum_{i=1}^{n}(i(i+1))^{-1}, n \geq 1$。試求$\lim_{n\to\infty} a_n$。

9. 設$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 5/a_n$, $n \geq 1$。試說明下述的推導是否正確:
令$y = \lim_{n\to\infty} a_n$, 而得$y = 5/y$, 因此$y = \sqrt{5}$($-\sqrt{5}$不合)。